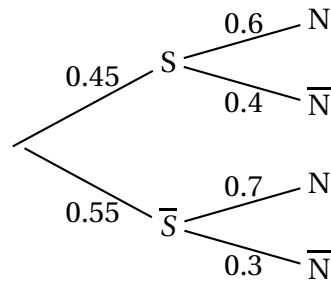


Exercice 1.

1. Construisons l'arbre de probabilité décrivant la situation.



2. (a) L'événement $S \cap N$ est l'événement : « le vacancier choisi fréquente la salle de sport et pratique la natation ».

$$\mathbf{P}(S \cap N) = \mathbf{P}(S) \times \mathbf{P}_S(N) \text{ donc } \mathbf{P}(S \cap N) = 0.45 \times 0.6 = 0.27.$$

- (b) S et \bar{S} forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N) &= \mathbf{P}(S) \times \mathbf{P}_S(N) + \mathbf{P}(\bar{S}) \times \mathbf{P}_{\bar{S}}(N) \\ &= 0.27 + 0.55 \times 0.7 \\ &= 0.655 \end{aligned}$$

- (c) Calculons $\mathbf{P}_N(S)$.

$$\mathbf{P}_N(S) = \frac{\mathbf{P}(S \cap N)}{\mathbf{P}(N)} \text{ donc } \mathbf{P}_N(S) = \frac{0.27}{0.655} \text{ soit } \mathbf{P}_N(S) = \frac{54}{131} \text{ ce qui correspond à la probabilité que le vacancier fréquente une salle de sport sachant qu'il pratique la natation.}$$

- (d) On a $\mathbb{P}_N(S) = \frac{54}{131}$ et $\mathbb{P}(S) = 0.45$.

On en déduit donc que $\mathbb{P}_N(S) \neq \mathbb{P}(S)$ ce qui prouve que les événements N et S ne sont pas indépendants, ils sont liés.

3. (a) D et N étant indépendants, il en est de même pour N et \bar{D} .

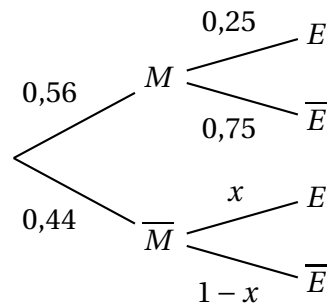
Or $\mathbb{P}(\bar{D} \cap N) = \mathbb{P}(\bar{D}) \times \mathbb{P}(N)$ donc $\mathbb{P}(\bar{D} \cap N) = 0,9 \times 0,655 = 0.5895$ ainsi la probabilité que le vacancier ne soit pas diabétique et pratique la natation est égale à 0.5895.

- (b) On cherche $\mathbb{P}_D(N)$.

N et D étant indépendants on a $\mathbb{P}_D(N) = \mathbb{P}(N) = 0,655$.

Exercice 2.

1. Voici l'arbre modélisant la situation :



2. (a) M et \overline{M} forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales :

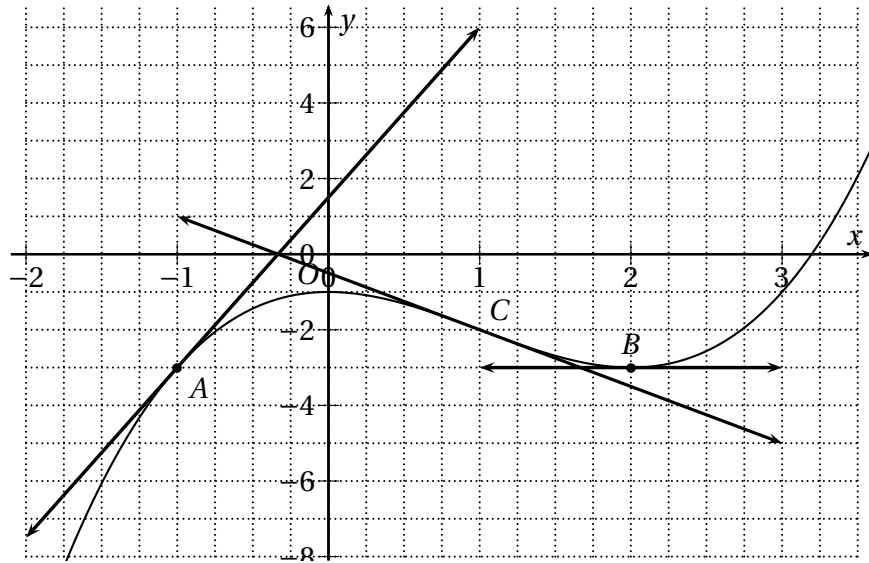
$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(E) &= \mathbf{P}(M \cap E) + \mathbf{P}(\overline{M} \cap E) \\
 &= 0,14 + \mathbf{P}(\overline{M}) \times \mathbf{P}_{\overline{M}}(E) \\
 &= 0,14 + 0,44x
 \end{aligned}$$

- (b) D'après l'énoncé, on sait que $\mathbf{P}(E) = 0,162$ car 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission. On a donc

$$0,14 + 0,44x = 0,162 \iff x = \frac{0,162 - 0,14}{0,44} = 0,05.$$

3. On a $\mathbf{P}(E) = 0,162$ et $\mathbf{P}_M(E) = 0,25$: on a donc $\mathbf{P}(E) \neq \mathbf{P}_M(E)$ ce qui prouve que les événements M et E ne sont pas indépendants.
Par ailleurs, $\mathbf{P}(M \cap E) \neq 0$ ce qui prouve que les événements M et E ne sont pas incompatibles.

Exercice 3.



- On a directement $f(-1) = -3$ et $f(2) = -3$.
- Graphiquement $f'(a)$ désigne le coefficient directeur de la tangente (T_a) à \mathcal{C} au point d'abscisse a . Ainsi,

- $f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{2}$
- $f'(2) = 0$ (tangente horizontale).

- On a $(T_{-1}) : y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ or $f'(-1) = \frac{9}{2}$ et $f(-1) = -3$ donc $y = \frac{9}{2}(x + 1) - 3$ soit $y = \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} - \frac{6}{2}$ c'est-à-dire :

$$(T_{-1}) : y = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2}$$

- On admet que la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
 - $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 donc $f'(1) = -\frac{3}{2}$.
 - Pour représenter cette tangente sur la figure donnée, on se place sur la courbe au point d'abscisse 1 (je l'ai appelé C) et on utilise le coefficient directeur de cette droite qui est $-\frac{3}{2}$ (3 vers le bas et 2 vers la droite).

Exercice 4.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 4\sqrt{x}$.

1. • Pour la fonction f : soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 + 3 - 4}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \cancel{h}(2+h) \\ &= 2+h\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} 2+h = 2$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_h(1) = 2$ qui est une limite finie : la fonction f est ainsi dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

- Pour la fonction g : soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau_h(1) &= \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \\ &= \frac{4\sqrt{1+h} - 4}{h} \\ &= \frac{4(\sqrt{1+h} - 1)}{h} \\ &= \frac{4(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \frac{4(1+h-1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \frac{4\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+h} + 1}\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{1+h} + 1} = 2$ donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_h(1) = 2$ qui est une limite finie : la fonction g est ainsi dérivable en 1 et $g'(1) = 2$.

2. On a $f'(1) = g'(1)$ et $f(1) = g(1)$ donc les courbes représentatives des fonctions f et g admettent la même tangente au point d'abscisse 1.

3. On a $(T_1) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$ soit $(T_1) : y = 2x + 2$.

Pour x proche de 1 on a l'approximation affine $g(x) \approx 2x + 2$.

En prenant la valeur $x = 1,01$ il vient $4\sqrt{1,01} \approx 4,02$.

4. On pose $d(x) = f(x) - (2x + 2)$.

(a) Pour tout réel x , $d(x) = x^2 + 3 - (2x + 2)$ soit $d(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Cette quantité est toujours positive car un carré est toujours positif dans les réels.

(b) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f est $y = 2x + 2$.

D'après la question précédente, $d(x) \geq 0$ ce qui prouve que la courbe représentative de la fonction f est située au dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.