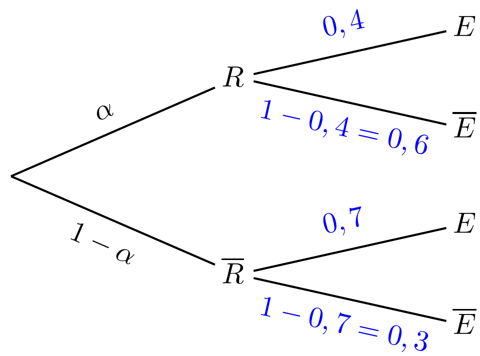
1. On complète l'arbre proposé.



2. (a) R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}(E) & = & \mathbf{P}(R\cap E)+\mathbf{P}\left(\overline{R}\cap E\right)\\ & = & \mathbf{P}(R)\times\mathbf{P}_R(E)+\mathbf{P}(\overline{R})\times\mathbf{P}_{\overline{R}}(E)\\ & = & \alpha\times 0,4+(1-\alpha)\times 0,7\\ & = & 0,4\alpha+0,7-0,7\alpha\\ & = & 0,7-0,3\alpha\end{array}$$

   (b) La probabilité que le client loue un vélo électrique est $\mathbf{P}(E)=0,58$.
   $\mathbf{P}(E)=0,58 \Longleftrightarrow 0,7-0,3\alpha=0,58 \Longleftrightarrow \alpha=\dfrac{0,58-0,7}{-0,3}=0,4.$
   On en déduit donc que $\alpha=0,4$.

3. On cherche $\mathbf{P}_E\left(\overline{R}\right)$.
   Or,

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{P}_E\left(\overline{R}\right) & = & \dfrac{\mathbf{P}\left(\overline{R}\cap E\right)}{\mathbf{P}(E)}\\ & = & \dfrac{(1-0,4)\times 0,7}{0,58}\\ & \approx & 0,72 \quad \text{arrondie au centième}\end{array}$$

   Conclusion : sachant que le client a loué un vélo électrique, la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain est environ égale à $0,72$ au centième près.

4. (a) On a quatre possibilités.

   - La location d'un vélo de route non électrique coûte 25 €.
     Cela correspond à l'événement $R\cap\overline{E}$ de probabilité $0,4\times 0,6=0,24$.
   - La location d'un vélo de route électrique coûte $25+15$ soit 40 €.
     Cela correspond à l'événement $R\cap E$ de probabilité $0,4\times 0,4=0,16$.
   - La location d'un vélo tout terrain non électrique coûte 35 €.
     Cela correspond à l'événement $\overline{R}\cap\overline{E}$ de probabilité $0,6\times 0,3=0,18$.
   - La location d'un vélo tout terrain électrique coûte $35+15$ soit 50 €.
     Cela correspond à l'événement $\overline{R}\cap E$ de probabilité $0,6\times 0,7=0,42$.

   On établit la loi de probabilité de X :

x_i	25	35	40	50
$\mathbf{P}(X=x_i)$	$0,24$	$0,18$	$0,16$	$0,42$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=1}^{4} x_i \mathbf{P}(X = x_i)\\ &= 25 \times 0,24 + 35 \times 0,18 + 40 \times 0,16 + 50 \times 0,42\\ &= 39,7\end{aligned}$$

Conclusion : au bout d'un grand nombre de jours, on peut dire que le coût moyen d'une location journalier est de $39,70$ euros.

5. (a) L'expérience est la répétition de 30 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
— soit la personne loue un vélo électrique avec la probabilité $p = 0,58$ (probabilité du succès) ;
— soit elle ne loue pas de vélo électrique avec la probabilité $q = 1 - p = 0,42$ (probabilité de l'échec).
Y comptant le nombre de succès, c'est-à-dire, le nombre de personnes louant un vélo électrique parmi les 30 personnes, Y suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,58$.

(b) On cherche $\mathbf{P}(Y = 20)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = 20) &= \binom{30}{20} \times 0,58^{20} \times 0,42^{10}\\ &\approx 0,095 \quad \text{arrondie au millième}\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique est environ égale à $0;095$ arrondie au millième.

(c) On cherche $\mathbf{P}(Y \geqslant 15)$.
Ceux qui ont une calculatrice casio 90+ le font directement. Ceux qui ont une casio 35+ sont obligés de passer par l'événement contraire.

$\mathbf{P}(Y \geqslant 15) = 1 - \mathbf{P}(Y \leqslant 14)$ donc $\mathbf{P}(Y \geqslant 15) \approx 1 - 0,14190 \approx 0,858$.

Conclusion : la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique est environ égale à $0,858$ au millième près.

6. (a) Dans ce cas Y suit la loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0,58$.
On a $\mathbf{P}(Y = 0) = \binom{n}{0} 0,58^0 \times 0,42^n = 0,42^n$ donc la probabilité qu'aucun client ne lue de vélo électrique un jour donné est égale à $0,42^n$.

(b) On veut $\mathbf{P}(Y \geqslant 1)$.
Or $\mathbf{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0)$ donc $\mathbf{P}(Y \geqslant 1) = 1 - 0,42^n$.
On cherche donc la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $1 - 0,42^n > 0,9999$.
On a $1 - 0.42^{10} < 0,9999$ et $1 - 0.42^{11} > 0,9999$ donc on retient $n = 11$ et il faut donc au minimum 11 clients pour que la probabilité qu'au moins un d'entre eux loue un vélo électrique un jour donné soit supérieure à $0,9999$.