Exercice 1.

(a) $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ (b) $\overline{z_1 - z_2} = -1 - 5\mathrm{i}$ (c) $z_1 z_2 = 10 - 5\mathrm{i}$

Exercice 2.

1. On a $\overline{Z} = -\mathrm{i}(z - \overline{z})$.
2. On remarque que $\overline{Z} = \mathrm{i}(-z + \overline{z})$ soit $\overline{Z} = Z$ ce qui démontre que Z est un réel.

Exercice 3.

1. On commence par écrire $2\mathrm{i} - 5 = -5 + 2\mathrm{i}$.
$(2\mathrm{i}-5)z + 2 = \mathrm{i} \Longleftrightarrow z = \dfrac{-2+\mathrm{i}}{-5+2\mathrm{i}}$ et on obtient $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{12}{29} - \dfrac{1}{29}\mathrm{i}\right\}$.
2. $(\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i})(z - 4 + \mathrm{i}) = 0$: c'est une équation produit-nul donc inutile de développer !

   $(\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i})(z - 4 + \mathrm{i}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i} = 0$ ou $z - 4 + \mathrm{i} = 0$ d'où $\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1 + \mathrm{i}\,;\, 4 - \mathrm{i}\}$.
3. $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$ en posant $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.
$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - y^2 + 1 = 0$ (1) et $2y(x+1) = 0$ (2).
L'équation (2) a deux solutions : $y = 0$ ou $x = -1$.
— Si $y = 0$ alors l'équation (1) devient $(x-1)^2 = 0$ et a solution $x = 1$.
— Si $x = -1$ alors l'équation (1) devient $y = 4$ et a solution $y = 2$ ou $y = -2$.
On en conclut que :
$$\mathscr{S}_{\mathbb{C}} = \{1\,;\, -1 + 2\mathrm{i}\,;\, -1 - 2\mathrm{i}\}$$

Exercice 4.

1. On a :
$$\begin{aligned} Z &= 2z^2 - \overline{z}^2 \\ &= 2(x^2 + \mathrm{i}y)^2 - (x - \mathrm{i}y)^2 \\ &= 2(x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2) - (x^2 - 2xy\mathrm{i} - y^2) \\ &= x^2 - y^2 + 6xy\mathrm{i} \end{aligned}$$
2. Si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ alors $x = y$ et dans ce cas $Z = 6xy\mathrm{i}$ et Z est un imaginaire pur.
3. Supposons Z imaginaire pur alors $\mathrm{Re}(Z) = 0$ soit $x^2 - y^2 = 0$ ou encore $(x-y)(x+y) = 0$ et il vient $x = y$ ou $x = -y$: ainsi Z imaginaire pur implique que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ ou $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$: on n'a donc pas l'implication : si Z imaginaire pur alors $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

Exercice 5.

1. $1 = 1 + 0\sqrt{3}i$ donc de la forme $a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ avec $a = 1$ et $b = 0$ qui sont deux entiers relatifs : ainsi $1 \in A$.
2. Soient z et z' deux éléments de A.
On peut donc écrire $z = a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'\sqrt{3}$ avec $(a\,;\,a'\,;\,b\,;\,b') \in \mathbb{Z}^4$.
$$\begin{aligned} zz' &= (a + \mathrm{i}b\sqrt{3})(a' + \mathrm{i}b'\sqrt{3}) \\ &= aa' - 3bb' + \mathrm{i}\sqrt{3}(ab' + a'b) \end{aligned}$$
où $aa' - 3bb'$ et $ab' + a'b$ sont deux entiers relatifs donc par suite $zz' \in A$.
3. On raisonne par récurrence. Soit $P_n :\ z^n \in A$.

   Initialisation : vérifions que P_0 est vraie.
Si $n = 0$ on a $z^0 = 1$ et $1 \in A$ d'après la question 1 : P_0 est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie c'est-à-dire $z^n \in A$ et montrons que P_{n+1} est vraie ($z^{n+1} \in A$).
On a $z^{n+1} = z \times z^n$. Or $z \in A$ et $z^n \in A$ par hypothèse de récurrence. On peut donc utiliser le résultat de la question 2 et ainsi $z^{n+1} \in A$ ce qui démontre que P_{n+1} est vraie.
Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
P_n est donc vraie pour tout entier naturel n c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ z^n \in A$.