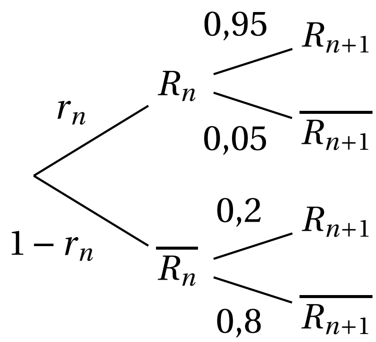
Exercice 1.

1. Voici l'arbre pondéré complété :



2. (a) R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(R_{n+1}) &= \mathbf{P}(R_n \cap R_{n+1}) + \mathbf{P}\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{P}(R_n) \times \mathbf{P}_{R_n}(R_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{R_n}) \times \mathbf{P}_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\
&= 0{,}95 r_n + 0{,}2\,(1 - r_n) \\
r_{n+1} &= 0{,}75 r_n + 0{,}2
\end{aligned}$$

(b) Voici le script complété :

```
def suite(n):
    r = 0.9
    for i in range(n) :
    r=0.75*r+0.2
    return r
```

(c) Il semble que la suite (r_n) soit décroissante et qu'elle converge vers 0,8.

(d) On procède par récurrence. Soit P_n : « $r_n \geqslant 0{,}8$ ».

Initialisation : vérifions que P_1 est vraie.
si $n = 1$ on a $r_1 = 0{,}9$ donc $r_1 \geqslant 0{,}8$ ce qui justifie que P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons P_n vraie ($r_n \geqslant 0{,}8$).
Montrons que P_{n+1} est vraie ($r_{n+1} \geqslant 0{,}8$) .
D'après l'hypothèse de récurrence : $r_n \geqslant 0{,}8$ et en multipliant cette inégalité par $0{,}75 > 0$ il vient $0{,}75 r_n \geqslant 0{,}6$ puis en additionnant 0,2 on a $0{,}75 r_n + 0{,}2 \geqslant 0{,}8$ soit $r_{n+1} \geqslant 0{,}8$ ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_1 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 1$, P_n est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n \geqslant 0{,}8.$$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} r_{n+1} - r_n &= 0{,}75 r_n + 0{,}2 - r_n \\ &= -0{,}25 r_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

D'après la question précédente on a démontré que $r_n \geqslant 0{,}8$ donc en multipliant cette inégalité par $-0{,}25 < 0$, il vient $-0{,}25 r_n \leqslant -0{,}2$ puis en additionnant 0,2 on obtient $-0{,}25 r_n + 0{,}2 \leqslant 0$ soit $r_{n+1} - r_n \leqslant 0$ ce qui prouve que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(f) La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0,8 donc la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= r_{n+1} - 0{,}8 \\ &= 0{,}75 r_n + 0{,}2 - 0{,}8 \\ &= 0{,}75 r_n - 0{,}6 \\ &= 0{,}75 \left(r_n - \frac{0{,}6}{0{,}75} \right) \\ &= 0{,}75 (r_n - 0{,}8) \\ &= 0{,}75 v_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $v_1 = r_1 - 0{,}8 = 0{,}9 - 0{,}8 = 0{,}1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 q^{n-1}$ soit $v_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1}$.
Or $v_n = r_n - 0{,}8$ donc :

$$\begin{aligned} r_n &= v_n + 0{,}8 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8 \\ &= \frac{0{,}1}{0{,}75} \times 0{,}75^n + 0{,}8 \\ &= \frac{2}{15} \times 0{,}75^n + 0{,}8 \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit P_n : « $u_n = \dfrac{7}{8^{n+1}-1}$ ».

Initialisation : vérifions que P_0 est vraie.

si $n = 0$ on a dans le membre de gauche $u_0 = 1$ et dans le membre de droite $\dfrac{7}{8^{0+1}-1} = 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie $\left(u_n = \dfrac{7}{8^{n+1}-1}\right)$.

Montrons que P_{n+1} est vraie $\left(u_{n+1} = \dfrac{7}{8^{n+2}-1}\right)$.

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{u_n}{u_n+8} \\
&= \frac{\dfrac{7}{8^{n+1}-1}}{\dfrac{7}{8^{n+1}-1}+8} \quad \text{D'après H.R} \\
&= \frac{\dfrac{7}{8^{n+1}-1}}{\dfrac{7+8^{n+2}-8}{8^{n+1}-1}} \\
&= \frac{7}{\cancel{8^{n+1}-1}} \times \frac{\cancel{8^{n+1}-1}}{8^{n+2}-1} \\
&= \frac{7}{8^{n+2}-1}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n = 0$, on en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{7}{8^{n+1}-1}$$