Exercice 1.

1. La matrice A est de format 2×3 et B est de format 3×2 : le nombre de colonnes de la matrice A est égale au nombre de lignes de matrice B donc le produit AB existe bien et la matrice produit est de format 2×2.
   On a aisément $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ soit la matrice I_2.
2. Les matrices A et B ne sont pas carrées donc elles ne peuvent être l'inverse l'une de l'autre.

Exercice 2.

1. On trouve $6M-M^2=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$ soit $6M-M^2=5I_2$ donc $k=5$.
2. $6M-M^2=5I_2 \Longleftrightarrow M\times\frac{1}{5}(6I_2-M)=\frac{1}{5}(6I_2-M)\times M=I_2$ ce qui prouve que la matrice M est inversible et son inverse est $A^{-1}=\frac{6}{5}I_2-\frac{1}{5}M$ ainsi $\alpha=\frac{6}{5}$ et $\beta=-\frac{1}{5}$.

Exercice 3.

1. On a aisément : $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.
2. (a) $B=A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $B^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$ et par suite on a $B^2=3B$.
   (b) Supposons B inversible, soit B^{-1} son inverse.
   On multiplie l'égalité précédente par B^{-1} à gauche, il vient $B^{-1}\times B^2=3B^{-1}\times B$ soit $B=3I_2$: absurde car $B\neq 3I_2$ donc B n'est pas inversible.
   (c) On a $B^2=3B$ donc $(A+I_3)^2=3(A+I_3)$ et en développant : $A^2+2A+I_3=3A+3I_3$ soit $A^2-A=2I_3$ ou encore : $A\times\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3\right)=\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3\right)\times A=I_3$ donc la matrice A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1}=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Exercice 4.

1. On a $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&4\end{pmatrix}=3A-2I_3$.
2. Soit $\mathscr{P}_n$: « $A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I_3$ ».
   Initialisation : vérifions que $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   Si $n=1$ dans le membre de gauche de l'égalité on a A.
   Dans le membre de droite $(2^1-1)A+(2-2^1)I_3=A$ ce qui prouve que $\mathscr{P}_1$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I_3$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire $A^{n+1}=(2^{n+1}-1)A+(2-2^{n+1})I_3$.
   Or,

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=A\times A^n\\&=A\times\left[(2^n-1)A+(2-2^n)I_3\right]\quad\text{en utilisant H.R}\\&=(2^n-1)A^2+(2-2^n)A\\&=(2^n-1)(3A-2I_3)+(2-2^n)A\quad\text{en utilisant}\quad A^2=3A-2I_3\\&=(3\times2^n-3+2-2^n)A+(2-2^{n+1})I_3\\&=(2^{n+1}-1)A+(2-2^{n+1})I_3\end{aligned}$$

   Ce qui prouve que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n=1$.
   $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n non nul c'est-à-dire :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=(2^n-1)A+(2-2^n)I_3$$