Exercice 1.

1. La droite (d_1) est dirigée par le vecteur de coordonnées $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de la droite (d_2) est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.
   On constate que $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{u}$: les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont donc colinéaires et on en déduit que les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires.

2. Les droites (d_1) et (d_2) étant perpendiculaires, elles sont donc sécantes en un point K dont les coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3x+5y &= 23 \\ 5x-3y &= -7 \end{cases}$$

   On a $\Delta = -34$ donc le système admet un unique couple solution que l'on peut résoudre avec la méthode de Cramer et on a : On a alors :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 5 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}}{-34} = \frac{-69+35}{-34} = 1 \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}}{-34} = \frac{-21-115}{-34} = 4$$

   On en déduit que le point K a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. Le point Ω est le centre du cercle $\mathscr{C}$ et est donc le milieu du segment $[AB]$.
   On en déduit que $\Omega(4\,;2)$ en appliquant la formule des coordonnées du milieu d'un segment.
   Son rayon est par exemple ΩA.
   Or :

$$\begin{aligned} \Omega A^2 &= (x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 \\ &= (-2-4)^2 + (10-2)^2 \\ &= 100 \\ &= 10^2 \end{aligned}$$

   On en déduit que $r = 10$ car $r \geqslant 0$.

2. La tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point A est perpendiculaire à $(A\Omega)$ donc $\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal de (T).
   Or $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$ et donc on peut prendre comme vecteur normal de (T) le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.
   On en déduit que $(T)\ :\ 3x-4y+c=0$. Le point A appartient à (T) donc $3x_A - 4y_A + c = 0$ et on trouve $c = 46$ et ainsi :

$$(T)\ :\ 3x-4y+46=0$$

Exercice 3.

1. On a $(a\,;b\,;c) = (6\,;1\,;5)$ donc $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = -119 < 0$: le trinôme n'admet pas de racine réelle. Il est de signe constant et du signe de $a = 6$ c'est-à-dire strictement positif.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f(x)$	$+$

2. On a $\Delta = 0$ donc le trinôme admet une unique racine $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{6}$.
   Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -36\left(x - \dfrac{1}{6}\right)^2$.

3. On remarque que $7777 = 8888 - 1111$ donc $x_1 = -1$ est solution évidente de l'équation.
   Or $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $-1x_2 = \dfrac{1111}{8888}$ soit $x_2 = -\dfrac{1}{8}$.
   On en déduit que : $S_{\mathbb{R}} = \left\{1\,; -\dfrac{1}{8}\right\}$.

Exercice 4. Si on pose $X = x^2$ la première équation devient $-X^2 + 4X - 3 = 0$ et en posant $X = \sqrt{x}$ on obtient la même équation. On a $a + b + c = 0$ donc $X_1 = 1$ est racine évidente. Or $X_1X_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $X_2 = 3$.

- Pour ceux qui ont choisi la première équation : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-1\,;1\,;\sqrt{3}\,;-\sqrt{3}\right\}$.
- Pour ceux qui ont choisi la première équation : $S_{\mathbb{R}} = \{1\,;9\}$.

Exercice 5.

1. (a) $P(-4) = 0$.
   (b) -4 est racine de P et $P(x)$ est factorisable par $x + 4$.
2. Utilisons la méthode de Ruffini pour déterminer les trois réels a, b et c :

	-1	2	31	28
-4		4	-24	-28
	-1	6	7	0

   On en déduit donc que $P(x) = (x + 4)(-x^2 + 6x + 7)$.

3. (a) Calcul des racines de P : on résout l'équation $P(x) = 0$.
   Or $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x + 4 = 0$ (1) ou $-x^2 + 6x + 7 = 0$ (2). La première équation donne $x = -4$. Pour la seconde, on calcule le discriminant ou on voit que $a + c = b$ ce qui montre que $x_1 = -1$ est une solution de (2). On sait que $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ donc $-x_2 = -\dfrac{7}{-1}$ soit $x_2 = 7$.
   On peut alors dresser le tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$		-4		-1		7		$+\infty$
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $-x^2+6x+7$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   (b) On veut $P(x) \leqslant 0$: on en déduit que $S = [-4\,;-1] \cup [7\,;+\infty[$.

Exercice 6.

1. On a $\mathscr{A}_{MAN} = \dfrac{MA \times AN}{2}$ donc $\mathscr{A}_{MAN} = \dfrac{x^2}{2}$.
   De même $\mathscr{A}_{NBP} = \dfrac{BN \times BP}{2}$ donc $\mathscr{A}_{MAN} = \dfrac{(10-x)(6-x)}{2}$.
2. (a) On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}_{MNPQ} & = & \mathscr{A}_{ABCD} - 2\mathscr{A}_{MAN} - 2\mathscr{A}_{NBP} \\ & = & 60 - x^2 - (10-x)(6-x) \\ & = & 60 - x^2 - (60 - 10x - 6x + x^2) \\ & = & 60 - x^2 - 60 + 10x + 6x - x^2 \\ & = & -2x^2 + 16x \end{array}$$

   (b) On doit calculer α et β.
   On a $(a\,; b\,; c) = (-2\,; 16\,; 0)$.
   $\alpha = -\dfrac{16}{-4} = 4$ et $\beta = f(4) = -2 \times 4^2 + 16 \times 4$ soit $\beta = 32$.
   Vu que $a < 0$, on en déduit le tableau de variation de f_2 sur $[0\,;8]$:

x	0		4		8
Variation de f	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	0

   (c) L'aire du quadrilatère $MNPQ$ est maximale pour $x = 4$ et cette aire maximale est égale à 32 u.a.

   (d) $\mathscr{A}_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD} \Longleftrightarrow -2x^2 + 16x = 30 \Longleftrightarrow -2x^2 + 16x - 30 = 0$: dont les solutions sont $x_1 = 3$ ou $x_2 = 5$. ces deux valeurs conviennent car situées dans l'intervalle $[0\,;8]$.