Exercice 1.

1. On calcule v_1.

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & 1,6v_0 - 1,6v_0^2 \\ & = & 1,6 \times 0,3 - 1,6 \times 0,3^2 \\ & = & 0,336 \end{array}$$

Au bout d'un mois il y aura $0,336$ million d'insectes soit $336\,000$.

2. (a) Résolvons l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{array}{rl} f(x) = x & \iff 1,6x - 1,6x^2 = x \\ & \iff 0,6x - 1,6x^2 = 0 \\ & \iff x(0,6 - 1,6x) = 0 \\ & \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,6 - 1,6x = 0 \\ & \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{0,6}{1,6} = 0,375 \end{array}$$

$S_{\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]} = \{0\,;\,0,375\}$.

(b) On étudie les variations de f sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, $f'(x) = 1,6 - 3,2x$.

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

$$\begin{array}{rl} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} & \Longrightarrow 0 \geqslant -3,2x \geqslant -1,6 \\ & \Longrightarrow 1,6 \geqslant f'(x) \geqslant 0 \end{array}$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

3. (a) Soit pose P_n la proposition : « $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. ».

— Initialisation : On a $v_0 = 0,5$ et $v_1 = 0,336$.
On a bien $0 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc la proposition P_0 est vraie.

— Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie c'est-à-dire $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ et montrons alors que P_{n+1} vraie c'est-à-dire $0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{ll} 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2} & \\ \Longrightarrow f(0) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right) & f \text{ est strictement croissante sur } \left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right] \\ \Longrightarrow 0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0,4 & \text{car } f(0) = 0,\ f(v_{n+1}) = v_{n+2},\ f(v_n) = v_{n+1}),\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,4 \\ \Longrightarrow 0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0,4 \leqslant 0,5 & \end{array}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

— Conclusion : P_0 est vraie, et P_n est héréditaire : on en déduit que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$$

(b) — $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est donc décroissante.
   — $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n$: la suite (v_n) est donc minorée par 0.
   — La suite (v_n) converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$.

(c) L'énoncé nous précise que la limite ℓ de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$ dont les solutions sont $x = 0$ ou $x = 0,375$.
   Or $v_0 = 0,3$ et la suite (v_n) est décroissante donc ℓ ne peut être égale à $0,375$ et donc $\ell = 0$.

(d) Ce résultat suggère que les insectes seront en voie de disparition puisque leur nombre se rapprochera de à.

Exercice 2.

1. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on change d'écriture.
   Soit $n > 0$: $-2n^2 + 8n - 5 = n^2\left(-2 + \dfrac{8}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right)$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \dfrac{8}{n} - \dfrac{5}{n^2} = -2\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{par produitdes limites}} \lim_{n\to+\infty} n^2\left(-2 + \frac{8}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = -\infty.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 + 8n - 5 = -\infty$.

2. $-1 < \dfrac{12}{13} < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{12}{13}\right)^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(\dfrac{12}{13}\right)^n + 200 = 200$.

3. On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on change d'écriture.
   $4n - \sqrt{n} = n\left(4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 4\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{par produitdes limites}} \lim_{n\to+\infty} n\left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n - \sqrt{n} = +\infty$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1$ puis $4^n - 1 \leqslant 4^n + \cos(2n) \leqslant \cancel{4^n + 1}$.
   $4 > 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - 1 = +\infty$: d'après le théorème de comparaison des limites on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n + \cos(2n) = +\infty$.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ puis $-2 \leqslant 2(-1)^n \leqslant 2$ et enfin :
   $\cancel{-2 - n} \leqslant 2(-1)^n - n \leqslant 2 - n$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - n = -\infty$: d'après le théorème de comparaison des limites on a alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} 2(-1)^n - n = -\infty$$
   .