

★★★★☆ Exercice 1

4 points

- **Question 1.** Un article augmente de 5 %. Le coefficient multiplicateur associé est $1 + \frac{5}{100} = 1,05$.

Réponse : 1,05

- **Question 2.** Augmenter de 2 % revient à multiplier par 1,02, et augmenter de 3 % revient à multiplier par 1,03. Le coefficient multiplicateur global est $1,02 \times 1,03 = 1,0506$, ce qui correspond à une augmentation de 5,06 %.

Réponse : 5,06 %

- **Question 3.** L'inéquation $(\mathcal{J}) : x^2 \geq 10$ cherche les abscisses des points de la parabole situés au-dessus de la droite d'équation $y = 10$. Ce sont les réels x tels que $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$.

Réponse : $x \leq -\sqrt{10}$ ou $x \geq \sqrt{10}$

- **Question 4.** $P(x) = x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$.

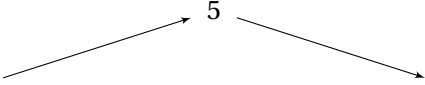
Réponse : $(x + 3)^2 - 4$

★★★★☆ Exercice 2

4 points

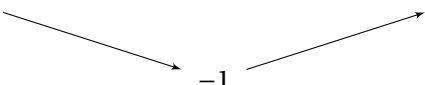
1. $f_1(x) = -3(x + 1)^2 + 5$.

Il s'agit de la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -3$, $\alpha = -1$ et $\beta = 5$. Comme $a = -3 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variation de f_1			

2. $f_2(x) = x^2 + 4x + 3$: C'est un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$ et $\beta = f_2(-2) = -1$. Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variation de f_2			

★★★☆☆ Exercice 3

5 points

M appartient au segment $[AB]$ de longueur 6, donc $x = AM \in [0; 6]$ et $MB = 6 - x$.

1. Aires des triangles :

- AMD est rectangle isocèle en A , donc $AD = AM = x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{AMD} &= \frac{AM \times AD}{2} \\ &= \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

- MBC est rectangle isocèle en B , donc $BC = MB = 6 - x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{MBC} &= \frac{MB \times BC}{2} \\ &= \frac{(6-x)^2}{2} \\ &= \frac{36 - 12x + x^2}{2}\end{aligned}$$

- $ABCD$ est un trapèze rectangle de hauteur $AB = 6$ et de bases $AD = x$ et $BC = 6 - x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(x + 6 - x) \times 6}{2} \\ &= 18\end{aligned}$$

Par soustraction, l'aire du triangle MCD est :

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMD} - \mathcal{A}_{MBC} \\ &= 18 - \frac{x^2}{2} - \frac{36 - 12x + x^2}{2} \\ &= 18 - \frac{2x^2 - 12x + 36}{2} \\ &= 18 - (x^2 - 6x + 18) \\ &= -x^2 + 6x\end{aligned}$$

2. f est un polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = 0$.

$\alpha = -\frac{6}{2(-1)} = 3$ et $\beta = f(3) = -(3)^2 + 6(3) = 9$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(6) = 0$ (par symétrie).

Comme $a < 0$, f est croissante puis décroissante.

x	0	3	6
$f(x)$	0	9	0

3. D'après le tableau de variations, f atteint son maximum en $x = 3$. L'aire du triangle MCD est donc maximale lorsque $AM = 3$ (c'est-à-dire quand M est le milieu de $[AB]$). Cette aire maximale vaut 9 unités d'aire.

★★☆☆☆ Exercice 4

7 points

On donne $M(-1; 3)$, $T(1; 8)$, $B(-3; 2)$ et $F(-1; 7)$.

1. Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{TF}$ sont égaux.

- $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 2 - 3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- De même $\overrightarrow{TF} \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 7 - 8 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{TF} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{TF}$, le quadrilatère $MTFB$ est un **parallélogramme**.

2. (a) Calcul des longueurs MT et MB :

- Calculons MT :

$$\begin{aligned} MT^2 &= (1 - (-1))^2 + (8 - 3)^2 \\ &= 2^2 + 5^2 \\ &= 29 \end{aligned}$$

D'où $MT = \sqrt{29}$, ($MT \geq 0$).

- Calculons MB :

$$\begin{aligned} MB^2 &= (-3 - (-1))^2 + (2 - 3)^2 \\ &= (-2)^2 + (-1)^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

D'où $MB = \sqrt{5}$, ($MB \geq 0$).

(b) $MTFB$ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont pour longueurs $MT = \sqrt{29}$ et $MB = \sqrt{5}$.
Comme $MT \neq MB$, $MTFB$ **n'est pas un losange**.

3. K est le centre du parallélogramme $MTFB$, donc le milieu de la diagonale $[MF]$:

$$x_K = \frac{-1 + (-1)}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_K = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

D'où $K(-1; 5)$.

4. Soit $L(5; 14)$. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{BL}$:

$$\overrightarrow{BT} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{BL} = 2\overrightarrow{BT}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires : les points B , L et T **sont alignés**.