☆☆☆☆☆ **Exercice 1.** **/3**

On donne les nombres complexes $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$.
Déterminer la forme algébrique de :

(a) $\dfrac{1}{z_1}$ (b) $\overline{z_1 - z_2}$ (c) $z_1 z_2$

★☆☆☆☆ **Exercice 2.** **/2**

Pour tout nombre complexe z, on considère le nombre complexe Z défini par $Z = \mathrm{i}(\overline{z} - z)$.

1. Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de z et $\overline{z}$.
2. Que peut-on en déduire pour Z ? Justifier.

★★☆☆☆ **Exercice 3.** **/6**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(2\mathrm{i} - 5)z + 2 = \mathrm{i}$
2. $(\mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i})(z - 4 + \mathrm{i}) = 0$
3. $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$ en posant $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

★★☆☆☆ **Exercice 4.** **/5**

Pour tout nombre complexe z, on considère le nombre complexe $Z = 2z^2 - \overline{z}^2$ et on pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Vérifier que $Z = x^2 - y^2 + 6xy\mathrm{i}$.
2. En déduire que si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ alors Z est imaginaire pur.
3. Examiner la réciproque.

★★★☆☆ **Exercice 5.** **/4**

On désigne par A l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ où a et b sont deux entiers relatifs.
On note cet ensemble :

$$A = \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{3} \;\middle|\; (a\,;\,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Par exemple $z = -5\sqrt{3}\mathrm{i} \in A$: en effet z s'écrit sous la forme $a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ avec $a = 0$ et $b = -5$ qui sont tous deux des entiers relatifs.

1. Vérifier que $1 \in A$.
2. Soient z et z' deux éléments de A : il existe donc $(a\,;\,a'\,;\,b\,;\,b') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $z = a + \mathrm{i}b\sqrt{3}$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'\sqrt{3}$.
   Démontrer que $zz' \in A$.
3. Soit $z \in A$.
   Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^n \in A$.

> *« La variété des erreurs et des croyances suffit à nous rappeler que l'erreur est notre état naturel, l'erreur, ou plutôt la confusion, l'incohérence, la mobilité des pensées. D'où l'on ne sort que par un décret qui est d'abord refus, doute, attente. »*

Alain (1868–1951). *Éléments de philosophie*