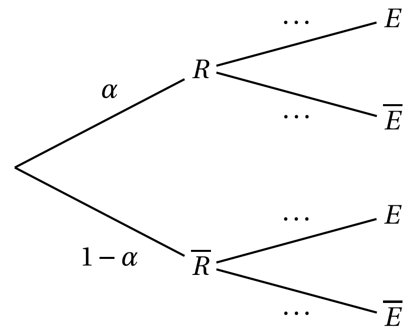
Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain. Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :
— Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;
— Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;
— La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les événements suivants :
- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, événements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :
Si F désigne un événement quelconque, on notera $\mathbf{P}(F)$ la probabilité de F.



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2. (a) Montrer que $\mathbf{P}(E) = 0,7 - 0,3\alpha$.
   (b) En déduire que : $\alpha = 0,4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.
   Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.
   Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.
   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
   (a) Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
5. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.
   On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $\mathbf{P}(E) = 0,58$.
   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. *On donnera le résultat arrondi au millième.*
   (c) Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. *On donnera le résultat arrondi au millième.*
6. n clients se présentent un jour donné dans le magasin d'Hugo où n est un entier naturel non nul.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun client ne loue de véhicule électrique.
   (b) Combien de clients au minimum doivent se présenter dans le magasin d'Hugo pour que la probabilité qu'au moins un d'entre eux loue un vélo électrique soit supérieure à $0,9999$?