★★★☆☆ Exercice 1 /16

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

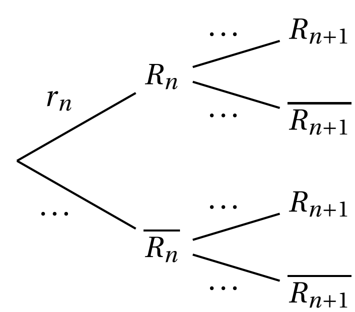
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = \mathbf{P}(R_n)$.

1. Compléter (sur le sujet) l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.

   (b) Compléter, sur le sujet, la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme r_n.

```
def suite(n):
    r = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return r
```

   (c) À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (r_n).

```
» suite(1)
0.9
» suite(10)
0.80756313515
» suite(20)
0.80042288283
» suite(30)
0.8000238109
```

(d) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, $r_n \geqslant 0{,}8$.

(e) Étudier la monotonie de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(f) Déduire des questions précédentes la convergence de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
La limite n'est pas attendue.

3. On se propose de déterminer l'expression explicite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Pour cela, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier naturel n nul par $v_n = r_n - 0{,}8$.

(a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme.

(b) Exprimer pour tout entier naturel n non nul v_n en fonction de n puis démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = \dfrac{2}{15} \times 0{,}75^n + 0{,}8$.

★★★★☆ **Exercice 2** **/4**

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{7}{8^{n+1} - 1}$.

> *« La logique est l'hygiène des mathématiques. »*

André Weil (1906 – 1998)