Exercice 1. Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;+\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$ puis calculer la limite de g en $+\infty$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   (c) Vérifier que α appartient à l'intervalle $[0,70\,;0,71]$.

   (d) On considère la fonction `seuil` suivante ci-dessous dans le langage Python. On rappelle que la fonction `exp` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction exponentielle.

```
def  seuil(pas) :
     x=0.70
     while x**2*exp(x)-1 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.001)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   (e) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**
   (a) Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

   (b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (c) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (d) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   (e) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.

Exercice 2.

Partie A.

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n\,(1 - u_n)\,.$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x\,(1 - x)\,.$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n :
   $$u_n \leqslant u_{n+1}$$
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit ℓ la limite de la suite (u_n).
   Calculer cette limite.

Partie B.

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.

En 2022, cette population compte 3000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n\,(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   (a) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Déterminer la limite de P_n en la justifiant.
2. Dans cette question $b = 0,2$.
   (a) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
   Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n\,(1 - v_n)$.
   (b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.