Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. leur tracé est donné en annexe page 2.

1. **Étude des fonctions f et g**
   a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   b. Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.
2. **Calcul d'intégrales**
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et , si } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

   a. Calculer la valeur exacte de I_0.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

   c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.
3. **Calcul d'une aire plane**
   a. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   b. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
   En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :

$$\mathscr{A} = 3 - \mathrm{e}.$$

4. **Étude de l'égalité de deux aires**
   Soit a un réel strictement supérieur à 1.
   On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
   On admet que $S(a)$ s'exprime par :

$$S(a) = 3 - \mathrm{e}^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right).$$

   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales.
   a. Démontrer que l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation :

$$\mathrm{e}^a = a^2 + a + 1$$

   b. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

Annexe

(Courbes de l'exercice)