BACCALAURÉAT BLANC SUJET 1

Mercredi 15 janvier 2025

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6
L'annexe de la page 6, même incomplète, doit être impérativement rendue avec la copie.

Le sujet ne doit pas être remis avec la copie.

L'utilisation de la calculatrice personnelle ***en mode examen*** *est autorisée.*

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 6 points

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.
On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $\mathbf{P}(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée.
   Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
   Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $\mathbf{P}(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $\mathbf{P}(X \geqslant k) \geqslant 0,5$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : la suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
Affirmation 4 : la suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$$

Affirmation 5 : la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 3 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction f en 1.

   b. En déduire une interprétation graphique.

2. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}.$$

   b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

4. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

   $$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$

   a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

   b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :

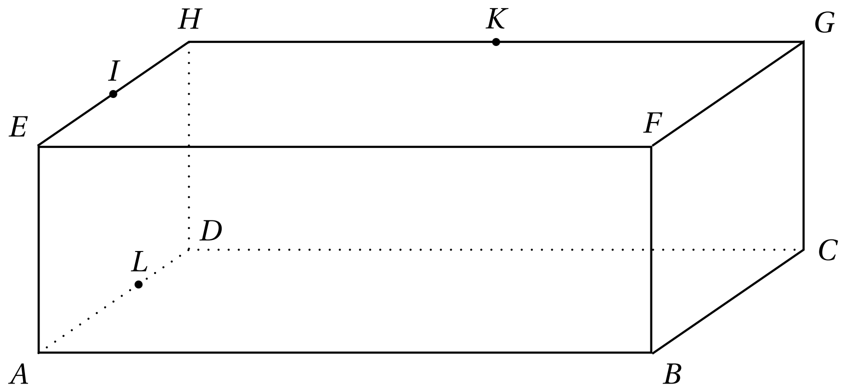
   $$\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 4 — 4 points

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 6$ et $AD = AE = 3$.
Soit I le milieu du segment$[EH]$, K le milieu du segment $[HG]$ et L le point tel que : $\overrightarrow{AL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points I, K et L.
2. Déterminer les coordonnées de deux vecteurs de base, c'est-à-dire, deux vecteurs directeurs du plan (IKL).
3. Soit N le point de coordonnées $(2;3;0)$.
   Démontrer que les points I, K, L et N sont coplanaires.
4. Justifier que le point N appartient à la droite (DC).
5. Placer le point N sur la figure donnée en annexe de la page 6.
6. Tracer la section du parallélépipède par le plan (IKL) sur l'annexe de la page 6.

Annexe de l'exercice 4