# BACCALAURÉAT BLANC SUJET 2

***Jeudi 16 janvier 2025***

## MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

*Ce sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7*
*L'annexe de la page 7, même incomplète, doit être impérativement rendue avec la copie.*

**Le sujet ne doit pas être remis avec la copie.**

*L'utilisation de la calculatrice personnelle* ***en mode examen*** *est autorisée.*

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

.

# Exercice 1 6 points

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- $22,86\,\%$ des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- $8,08\,\%$ des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- $1,27\,\%$ des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

*Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.*

**Partie A**

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- $N$ l'évènement « le véhicule est neuf » ;
- $R$ l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires des évènements contraires de $N$ et $R$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,028 3.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

**Partie B**

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.
Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0,65$.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.
On appelle $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie C**

On choisit désormais $n$ véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif.
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0,65$.
On assimile le choix de ces $n$ véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de $n$ de la probabilité $p_n$ que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note $q_n$ la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf.
   Déterminer la plus petite valeur de $n$ telle que $q_n \geqslant 0,9999$.

# Exercice 2 4 points

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

**1.** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$ par

$$u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}.$$

**Affirmation 1 :** la suite $(u_n)$ est divergente.

**2.** On considère la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $\begin{cases} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$

On admet que pour tout entier naturel $n$, $w_n > 0$.
On considère la suite $(t_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où $k$ est un nombre réel strictement positif.

**Affirmation 2 :** la suite $(t_n)$ est une suite arithmétique strictement croissante.

**3.** On donne ci-dessous la fonction u écrite en langage Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

**Affirmation 3 :** la valeur renvoyée par le programme lorsque l'on saisit `u(2,2)` dans la console Python est 1.

**4.** Soit la suite $(p_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$\begin{cases} p_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ p_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

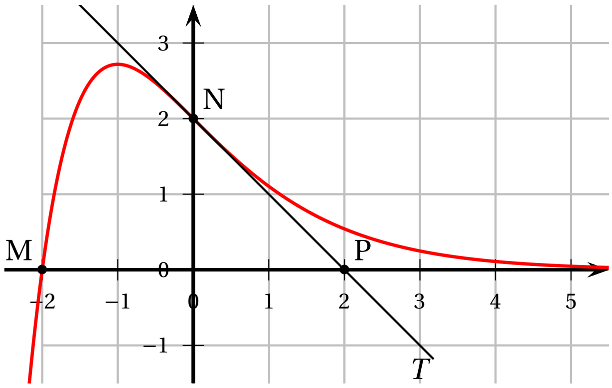
**Affirmation 4 :** la suite $(p_n)$ est croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$.

## Exercice 3 — 6 points

Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ sa fonction dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ ;
- la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ en son point N$(0 ; 2)$ ;
- le point M$(-2 ; 0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P$(2 ; 0)$ appartenant à la tangente $T$.

On précise que la fonction $f$ est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.

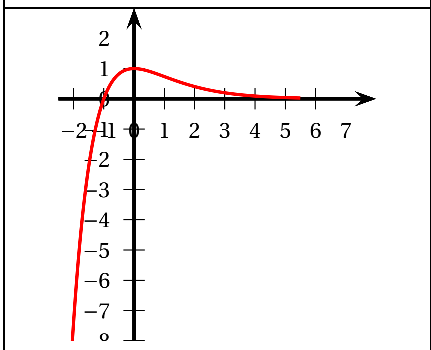
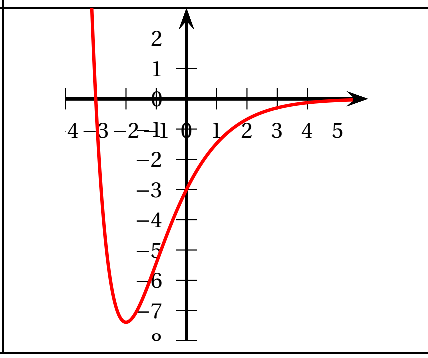
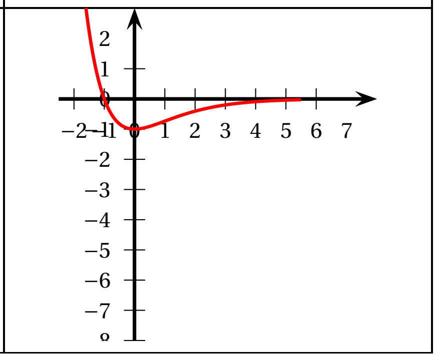



**Partie A : étude graphique**

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.

   **b.** Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction $f$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}$ ? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter la fonction dérivée $f$ ' de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$. Justifier.

| Courbe 1 | Courbe 2 | Courbe 3 |
|---|---|---|
|  |  |  |

### Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction $f$ est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où $a, b$ et $\lambda$ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

**1.** Justifier que $b = 2$.

**2.** Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de $a$.

**3.** Déterminer une expression algébrique de $f$. Justifier.

### Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

**1.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**2.** On admet que $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
Dresser le tableau de variations complet de $f$ sur $\mathbb{R}$ en justifiant la réponse.

**3.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution notée $\alpha$ sur $[-1\,;+\infty[$

**4.** Donner une valeur approchée de $\alpha$ à 0.01 près.

**5.** **a.** Étudier la convexité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

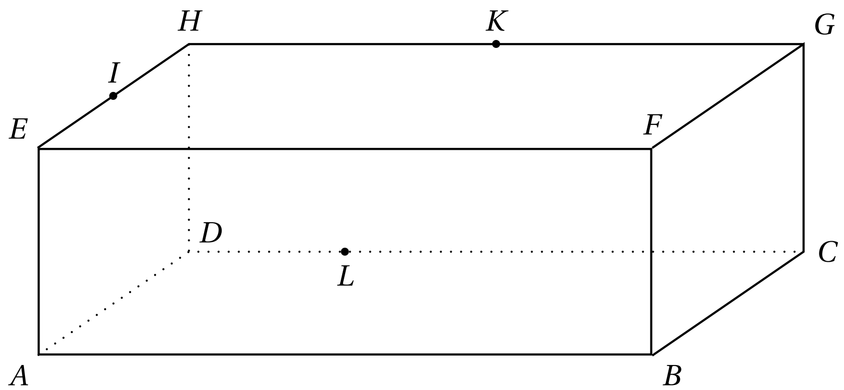
**c.** Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

**d.** En déduire que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-\infty\,;0]$, on a :

$$(x-2)\mathrm{e}^{x} + x + 2 \leq 0$$

# Exercice 4 — 4 points

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 6$ et $AD = AE = 3$.
Soit $I$ le milieu du segment$[EH]$, $K$ le milieu du segment $[HG]$ et $L$ le centre de la face $ABFE$.




On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\,\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\,,\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\,,\ \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points $I$, $K$ et $L$.
2. Déterminer les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan $(IKL)$.
3. Soit $N$ le point de coordonnées $\left(6\,;0\,;\frac{3}{4}\right)$.
   Démontrer que les points $I$, $K$, $L$ et $N$ sont coplanaires.
4. Justifier que le point $N$ appartient à la droite $(BF)$.
5. Placer le point $N$ sur la figure donnée en annexe de la page 7.
6. Tracer la section du parallélépipède par le plan $(IKL)$ sur l'annexe de la page 7.

# Annexe de l'exercice 4