Épreuve commune

Lycée Maurice RAVEL

Mercredi 17 janvier 2024

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice personnelle **en mode examen** est autorisée.

Tout candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

L'annexe de la page 5, même incomplète, doit être impérativement rendue avec la copie.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet ne doit pas être remis avec la copie.

Exercice 1 **5 points**

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
— N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
— D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
— R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Compléter l'arbre pondéré donné en annexe 1 de la page 5.
2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.
3. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $\mathbf{P}(R) = 0{,}651\,4$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable.
   Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.
   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   (b) Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*
2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.
   (a) Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
   (b) Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

Exercice 2 **5 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0 ! on a alors $a_0 = 1\ 700$ et $b_0 = 1\ 300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;

— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;

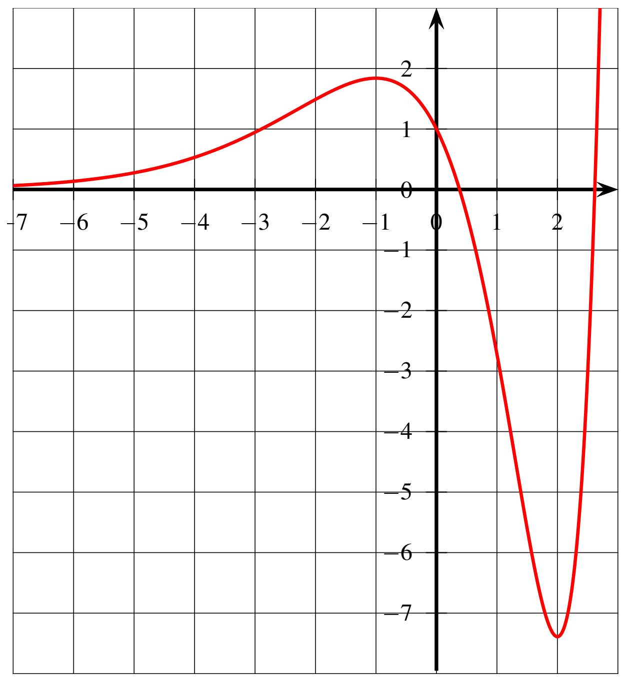
— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :
$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\ 700.$$
   (b) En déduire que la suite (a_n) converge. *Le calcul de la limite n'est pas attendu.*
5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1\ 200$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n, a_n = 500 \times 0,75^n + 1\ 200$.
6. (a) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. (a) Compléter le programme Python de l'annexe 2 afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.
   (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right) \mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. (a) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right) \mathrm{e}^x$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.

5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1~;~2]$, on a $f(x) \leqslant x + 6$.

Exercice 4 **4 points**

Sur l'annexe 3 de la page 5, on considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AE}} \text{ et } \overrightarrow{\text{HR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{HE}}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$ avec :

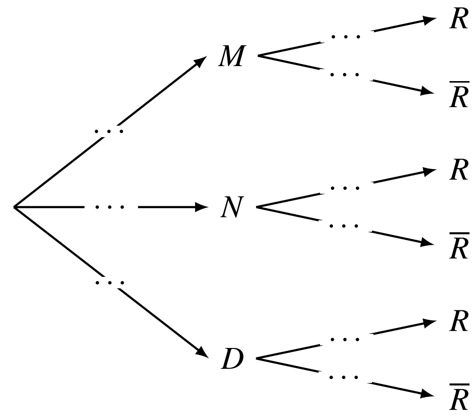
$$\overrightarrow{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{j} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{AD}} \text{ et } \overrightarrow{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{AE}}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$\text{B}(6\ ;\ 0\ ;\ 0), \text{F}(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } \text{R}(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points P et Q.
2. Soient les points $\text{J}(6\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et $\text{K}(6\ ;\ 6\ ;\ 2)$.
   (a) Démontrer que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.
   (b) Démontrer que les points P, Q et J forment un plan de l'espace.
   (c) Les points P, Q, R et J sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.
3. Sur l'annexe 3 de la page 5, construire la section du cube par le plan (PQR).
   On laissera apparents les traits de construction.

Annexe 1 de l'exercice 1



Annexe 2 de l'exercice 2

```
def   seuil() :
      n = 0
      A = 1 700
      while ...... :
            n=n+1
            A = ......
      return......
```

Annexe 3 de l'exercice 4