Épreuve commune

Lycée Maurice RAVEL

Jeudi 18 janvier 2024

MATHÉMATIQUES

Sujet 2

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

L'utilisation de la calculatrice personnelle **en mode examen** est autorisée.

Tout candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

L'annexe de la page 5, même incomplète, doit être impérativement rendue avec la copie.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet ne doit pas être remis avec la copie.

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.
On suppose que chaque client achète un seul matelas.
On dispose des informations suivantes :

- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
  Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On choisit au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = \mathbf{P}_{\overline{R}}(S)$, où $\mathbf{P}_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Compléter l'arbre pondéré donné à l'annexe 1 de la page 5.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
   On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard.
   On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   (a) Démontrer que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   (a) On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   Démontrer que $p_n = 0,82^n$.
   (b) Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0,01$.
   Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer que $u_1 = 12$.
   (b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
   (c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   Donner sa raison et son premier terme v_0.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

   (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. On cherche à déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.
   Pour cela, on considère le programme donné donné en page 5.
   (a) Compléter les deux instructions manquantes.
   (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

Exercice 3 **6 points**

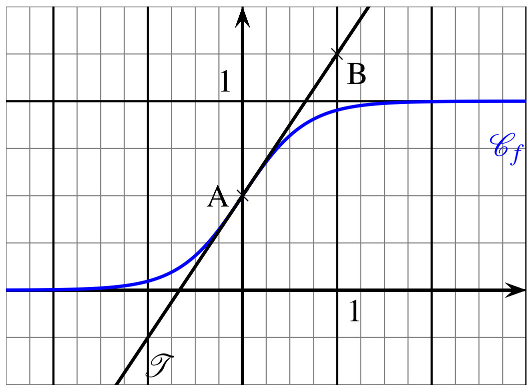
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A. Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B. Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   (b) Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction [.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,99$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis déterminer une valeur approchée de α au centième en précisant la méthode employée.

Partie C. Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$
2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Justifier la réponse.

Exercice 4 **4 points**

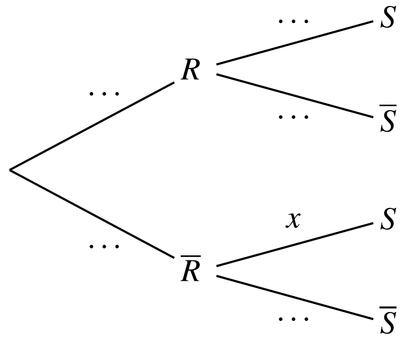
Sur l'annexe 3 de la page 5, on considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 et soit M le milieu du segment [AB].

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Dans ce repère, on a par exemple $C(1\,;\,1\,;\,0)$.

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points H et M.
2. Soient $N\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $K\left(\dfrac{3}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$
   (a) Démontrer que les points H, M et N forment un plan de l'espace.
   (b) Les points H, M, N et K sont-ils coplanaires ? Justifier la réponse.
3. Sur l'annexe 3 de la page 5, placer le point N et construire la section du cube par le plan (HMN).
   On laissera apparents les traits de construction.

Annexe 1 de l'exercice 1



Annexe 2 de l'exercice 2

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while . . . . . . :
        u = . . .
        n = n + 1
    return n
```

Annexe 3 de l'exercice 4