Seconde épreuve commune

Lycée Maurice RAVEL

Mardi 30 avril 2024

MATHÉMATIQUES

Sujet 1

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation de la calculatrice personnelle **en mode examen** est autorisée.

Tout candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet ne doit pas être remis avec la copie.

Exercice 1 **5 points**

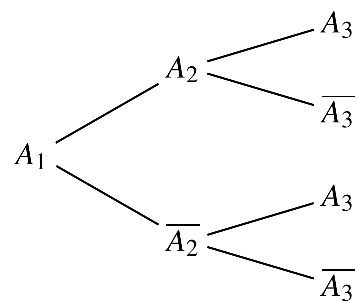
Le détaillant en fruits et légumes réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
   b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
   c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
   Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
   b. Soit n un entier naturel non nul.
   Reproduire et compléter la fonction `suite_p` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de p_n.

```
def suite_p(n) :
    p = ...
    for i in range(2,n+1) :
        p = ...
    return p
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   c. Calculer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 **6 points**

I. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. a. Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations complet de la fonction f.

3. Soit la droite (Δ) d'équation $y = x$ et pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on pose $d(x) = f(x) - x$.

a. Étudier pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, le signe de $d(x)$.

b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite (Δ) sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

II. Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\mathscr{A}(\alpha) = 1 - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$.

b. Déterminer la limite ℓ de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que $\ell = \mathscr{A}\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

Exercice 3 **6 points**

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\ ;\ 0\ ;\ 3),\ B(0\ ;\ 2\ ;\ 1),\ C(-1\ ;\ -1\ ;\ 2) \text{ et } D(3\ ;\ -3\ ;\ -1).$$

1. **Calcul d'un angle**
   - **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   - **b.** Calculer les longueurs AB et AC.
   - **c.** À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. **Calcul d'une aire**
   - **a.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
   - **b.** Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   - **c.** En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$
   - **d.** Calculer l'aire du triangle ABC.

3. **Calcul d'un volume**
   - **a.** Soit le point $F(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
   - **b.** Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
   - **c.** Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 4 **3 points**

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - y = \mathrm{e}^{x}.$$

1. **1.** Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{x}$ est une solution de (E).
2. **2.** Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' - y = 0$.
3. **3.** Déduire des questions précédentes toutes les solutions de (E).
4. **4.** Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.
5. **5.** Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+k)\mathrm{e}^{x}$ où k est un réel et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   Démontrer que $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion dont vous préciserez les coordonnées.