Seconde épreuve commune

Lycée Maurice RAVEL

Jeudi 02 mai 2024

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation de la calculatrice personnelle **en mode examen** est autorisée.

Tout candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet ne doit pas être remis avec la copie.

Exercice 1 **5 points**

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n $(n \geqslant 2)$:

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.
On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.

2. **a.** Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

b. Soit n un entier naturel non nul.
Reproduire et compléter la fonction `suite_p` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de p_n.

```
def suite_p(n) :
    p = ...
    for i in range(2,n+1) :
        p = ...
    return p
```

3. Calculer p_3.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $p_n > 0,25$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.

d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$.

e. Déterminer la valeur de ℓ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 **6 points**

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x \text{ et } g(x) = (\ln x)^2.$$

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

1. **a.** Étudier le signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, M est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N est le point de $\mathscr{C}'$ de même abscisse.

   a. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   Étudier les variations de la fonction h sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire que sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$, la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.

   c. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$.

   d. En déduire que, sur $]0\,;\,1[\ \cup\ ]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, il existe deux réels a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

   b. Vérifier que la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ est une primitive de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   c. On considère la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de cette partie du plan.

Exercice 3 **6 points**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, $C(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et $E(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$;
- Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. **a.** Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale au plan ABC et passant par le point E.

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ unités de volume.

Exercice 4 **3 points**

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' - 2y = 0$.
3. Déduire des questions précédentes toutes les solutions de (E).
4. Déterminer la fonction f_3, solution de (E), qui prend la valeur 3 en 0.
5. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+k)\mathrm{e}^{2x}$ où k est un réel et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Démontrer que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_g$.