1. Étude des fonctions f et g

a. $f(x) = \mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \mathrm{e}^T = +\infty$ donc par composition des limites on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$ et donc par produit des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

De même $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \mathrm{e}^T = +\infty$ donc par composition des limites on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$ et donc par produit des limites :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

b. $f(x) = \mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (limite de cours) et donc par inverses des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$: on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Faire de même pour $g(x)$.

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est dérivable et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x} \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{1-x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\, \mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1-x$ (fonction affine de racine 1) : on en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$+\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} \\ &= x(2-x)\mathrm{e}^{1-x} \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $x(2-x)$ qui est négatif sauf entre les racines 0 et 2.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Calcul d'intégrales

a. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 \\ &= \mathrm{e}-1 \end{aligned}$$

b. On pose :
$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) &=& x^{n+1} \\ v'(x) &=& \mathrm{e}^1-x \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) &=& (n+1)x^n \\ v(x) &=& -\mathrm{e}^{1-x} \end{array}\right.$ par exemple

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut donc faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1)x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -1+(n+1)I_n \end{aligned}$$

c. La formule précédente donne pour $n=0$, $I_1 = -1+I_0$ soit $I_1 = -1+\mathrm{e}-1 = \mathrm{e}-2$.
Pour $n=1$, $I_2 = -1+2I_1$ soit $I_2 = -1+2(\mathrm{e}-2) = 2\mathrm{e}-5$.

3. Calcul d'une aire plane

a. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x)-g(x) = x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x\mathrm{e}^{1-x}(1-x)$.
Comme $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$, soit négatif sauf entre les racines du trinôme 0 et 1.
Ceci montre que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]0~;~1[$ et au dessous sur $]-\infty~;~0[$ et sur $]1~;~+\infty[$.

b. On vient de voir que sur l'intervalle $[0~;~1]$ $f(x) \geqslant g(x)$, donc l'aire de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ est égale à la différence des intégrales :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = I_1 - I_2 = \mathrm{e}-2-(2\mathrm{e}-5) = 3-\mathrm{e}.$$

par linéarité de l'intégrale.

4. Étude de l'égalité de deux aires

a. On a $S_a = \mathscr{A} \iff 3-\mathrm{e}^{1-a}\left(a^2+a+1\right) = 3-\mathrm{e} \iff -\mathrm{e}^{1-a}\left(a^2+a+1\right) = -\mathrm{e} \iff \mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-a}\left(a^2+a+1\right) = \mathrm{e} \iff \mathrm{e}^{-a}\left(a^2+a+1\right) = 1 \iff$
$a^2+a+1 = \mathrm{e}^a$.

b. Il reste à résoudre l'équation $\mathrm{e}^x = x^2+x+1$ équivalente à $\mathrm{e}^x - x^2 - x - 1 = 0$ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
Si on pose, pour tout x réel : $h(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - x - 1$, cela revient à chercher un zéro de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle
$h'(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 1$ qui elle-même est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$h''(x) = \mathrm{e}^x - 2$

On a $h''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$

Donc $h''(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2 \iff x > \ln 2$.

h' est continue et strictement croissante sur $[\ln 2~;~+\infty[$ et à fortiori sur $[1~;~+\infty[$ puisque $\ln 2 \approx 0,69 < 1$.

On a $h'(1) = \mathrm{e}^1 - 2 - 1 = \mathrm{e} - 3 < 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$ (limite obtenue en factorisant e^x.)

Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, $1 < \alpha$ tel que $h'(\alpha) = 0$.

On en déduit que h est strictement négative sur $]1~;~\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha~;~+\infty[$.

h est donc strictement décroissante sur $]1~;~\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha~;~+\infty[$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1\\ x>1}} h(x) = \mathrm{e} - 3 \approx -0,28$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Ainsi h est strictement négative sur $]1~;~\alpha[$.

Enfin, h étant continue est strictement croissante sur $[\alpha~;~+\infty[$, il existe $\beta \in]\alpha~;~+\infty[$, unique, tel que $h(\beta) = 0$.

Avec une table de valeurs ou le solveur de la calculatrice on trouve aisément : $\alpha \approx 1,26$ et $\beta \approx 1,79$. (Voir la figure ci-dessous)