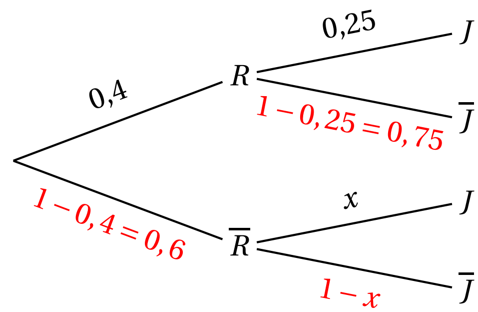
Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0,2$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right) = P(R) \times P_R(J) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = 0,1 + 0,6x$

   $$\left.\begin{array}{rcl} P(J) &=& 0,2 \\ P(J) &=& 0,1 + 0,6x \end{array}\right\} \Longrightarrow 0,2 = 0,1 + 0,6x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».

   C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité $P_J(R) = \dfrac{P(R \cap J)}{P(J)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2}$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.

   On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2. $E(X) = np$ donc $E(X) = 500 \times 0,2 = 100$: si on prend un grand nombre d'échantillons de 500 bouteilles, en moyenne, sur 500 bouteilles, 100 sont pur jus.

3. On cherche $P(X \geqslant 75)$ qui est égal à $1 - P(X \leqslant 74)$.

   À la calculatrice on trouve $P(X \leqslant 74) \approx 0,0016$ ce qui donne $0,998$ pour la probabilité cherchée.