Partie I

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   $u'(x) + u(x) = (\mathrm{e}^{-x} + x \times (-1)\mathrm{e}^{-x}) + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$
   Donc la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $\left(E'\right) : y' + y = 0$ soit $\left(E'\right) \iff y' = -y$.
   L'équation différentielle $y' = ay$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle $\left(E'\right)$ a pour solutions les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. La solution générale de l'équation (E) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre associée (E'), et d'une solution particulière de (E).
   On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
4. On cherche l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.
   $g(0) = 2 \iff k\mathrm{e}^0 + 0 = 2 \iff k = 2$; donc $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique en annexe les courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}$ sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. La fonction h est définie par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Sa dérivée h' est définie par $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Donc $h'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est décroissante. C'est donc la courbe en trait plein qui représente la fonction h.
2.
   - La courbe $\mathscr{C}_h$ coupe l'axe des ordonnées au point A. Le point A a donc pour coordonnées $(0\,;\, h(0))$. Or $h(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, donc le point A a pour ordonnée 1.
   - La courbe $\mathscr{C}_{f_k}$ coupe l'axe des ordonnées au point qui semble avoir pour ordonnée 2. Donc $f_k(0) = 2$, c'est-à-dire $(0 + k)\mathrm{e}^0 = 2$ donc $k = 2$. Donc la courbe en pointillés représente la fonction f_2 définie par $f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   - Les deux courbes se coupent au point C dont l'abscisse est solution de l'équation $f_2(x) = h(x)$.
     $f_2(x) = h(x) \iff (x+2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \left(\text{ car } \mathrm{e}^{-x} \neq 0\right) \iff x+2 = 1 \iff x = -1$
     Le projeté orthogonal H de C sur l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-1\,;\,0)$, ce qui permet, par symétrie par rapport au point O, de placer le point I de coordonnées $(1\,;\,0)$.