
Récurrance en autonomie : travail sur les égalités – Corrigé

Exercice 1

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ où :

$$\mathcal{P}_n : \ll u_n = 2^{n+1} + 1 \gg$$

Initialisation. Si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 3$ d'après l'énoncé et $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$ d'où $\mathcal{P}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $u_n = 2^{n+1} + 1$) et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$).
Or,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 && \text{d'après l'énoncé} \\ &= 2(2^{n+1} + 1) - 1 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+2} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + 1$$

Exercice 2 ★

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$ où :

$$\mathcal{P}_n : \ll u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \gg$$

Initialisation. Si $n = 1$ on a d'une part $u_1 = 3$ d'après l'énoncé et $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - 10 = 3$ d'où $\mathcal{P}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$) et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $u_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$).

Or,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,9u_n + 1,3 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= 0,9 \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1,3 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3 \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$$

Exercice 3 ★★

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 6n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}}$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ où :

$$\mathcal{P}_n : \text{« } u_n = 6n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}} \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 0$ on a d'une part $u_0 = 0$ d'après l'énoncé et $6(0) - 12 + \frac{3}{2^{-2}} = -12 + 3 \times 4 = 0$ d'où $\mathcal{P}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $u_n = 6n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}}$) et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $u_{n+1} = 6n - 6 + \frac{3}{2^{n-1}}$).

Or,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 3n \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= \frac{1}{2} \left(6n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}} \right) + 3n \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 3n - 6 + \frac{3}{2^{n-1}} + 3n \\ &= 6n - 6 + \frac{3}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6n - 12 + \frac{3}{2^{n-2}}$$

Exercice 4 ★★★

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Démontrer par récurrence que :

$$\sum_{k=2}^{2n} (k + 2^k) = n(2n + 1) + 2^{2n+1} - 5$$

Montrons par récurrence : pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ où :

$$\mathcal{P}_n : \ll \sum_{k=2}^{2n} (k + 2^k) = n(2n + 1) + 2^{2n+1} - 5 \gg$$

Initialisation. Si $n = 2$ on a d'une part $\sum_{k=2}^4 (k + 2^k) = (2 + 4) + (3 + 8) + (4 + 16) = 37$ et d'autre part $2(2(2) + 1) + 2^{2(2)+1} - 5 = 10 + 32 - 5 = 37$ d'où $\mathcal{P}_2$.

Hérédité. Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $\sum_{k=2}^{2n+2} (k + 2^k) = (n+1)(2n+3) + 2^{2n+3} - 5$).

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n+2} (k + 2^k) &= \sum_{k=2}^{2n} (k + 2^k) + (2n + 1 + 2^{2n+1}) + (2n + 2 + 2^{2n+2}) \\ &= n(2n + 1) + 2^{2n+1} - 5 + (4n + 3) + 2^{2n+1} + 2^{2n+2} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 2n^2 + n + 4n + 3 - 5 + 2 \times 2^{2n+1} + 2^{2n+2} \\ &= 2n^2 + 5n - 2 + 2^{2n+2} + 2^{2n+2} \\ &= (n + 1)(2n + 3) - 5 + 2 \times 2^{2n+2} \\ &= (n + 1)(2n + 3) + 2^{2n+3} - 5 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par principe de récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{2n} (k + 2^k) = n(2n + 1) + 2^{2n+1} - 5$$