Exercice 1.

Partie 1.

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$.
   Ainsi $u' + u = \mathrm{e}^{-x} - \cancel{x\mathrm{e}^{-x}} + \cancel{x\mathrm{e}^{-x}}$ donc $u' + u = \mathrm{e}^{-x}$ ce qui justifie que u est une solution particulière de (E).
2. $\mathrm{E}_0 : y' + y = 0 \iff y' = -y$.
   Les solutions de cette équation sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
   $$x \mapsto C\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}$$
3. — Supposons v solution de (E) alors $v' + v = \mathrm{e}^{-x}$.
   Or u est une solution particulière de (E) donc $u' + u = \mathrm{e}^{-x}$ et ainsi $v' + v = u' + u$ que l'on peut aussi écrire $(v-u)' + v - u = 0$ ce qui démontre que $v - u$ est solution de E_0.
   — Réciproquement supposons $v - u$ solution de E_0 on a alors $(v-u)' + v - u = 0$ soit $v' - u' + v - u = 0$ ou encore $v' + v = u' + u = \mathrm{e}^{-x}$ vu que u est une solution de (E).
   Ainsi v solution de (E).
   — Conclusion : v est solution de (E) équivaut à $v - u$ solution de E_0.
4. On a donc pour toute solution v de (E) :
   $v(x) - u(x) = C\mathrm{e}^{-x} \iff v(x) = u(x) + C\mathrm{e}^{-x} \iff v(x) = x\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} \iff v(x) = (x+C)\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}$.
5. La solution f_2 prenant la valeur 2 en 0 vérifie $f_2(0) = (0+C)\mathrm{e}^0 = 2 \iff C = 2$.
   Conclusion : $f_2(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie 2.

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x + k = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} \mathrm{e}^T = +\infty$: par composition des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et on en déduit par produit des limites que : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+k)\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.
   De même on a $f_k(x) = x\mathrm{e}^{-x} + k\mathrm{e}^{-x}$ soit $f_k(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + k\mathrm{e}^{-x}$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ (limite de cours) donc par inverse des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et ainsi :
   $$\lim_{x\to+\infty} (x+k)\mathrm{e}^{-x} = 0$$
2. f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
   $$\begin{aligned} f_k'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - (x+k)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1-k-x) \end{aligned}$$
3. Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit x réel, le signe de $f_k'(x)$ est celui de $1-k-x$ expression d'une fonction affine de coefficient directeur $m = -1 < 0$ qui s'annule pour $x = 1-k$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
signe de $f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_k	$-\infty$	$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	0

Partie 3.

1. (a) $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{I}_0 = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = \mathrm{e}^2 - 1$.

   (b) On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. On pose :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x^{n+1} & v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & \\ u'(x) = (n+1)x^n & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} & \text{par exemple} \end{array}$$

   avec u, u', v et v' dérivables sur $[-2\,;0]$, on intègre par parties :

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} + (n+1)\displaystyle\int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n \end{array}$$

   On a donc une relation de récurrence pour le calcul de I_n.

   (c) Pour $n = 0$, la relation précédente s'écrit $\mathrm{I}_1 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{I}_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$.
   De même avec $n = 1$, on obtient : $\mathrm{I}_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{I}_1 = 4\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 - 2 = 2\mathrm{e}^2 - 2$.

2. (a) D'après A. 5. la fonction représentée est la fonction f_2. Donc $k = 2$.

   (b) On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{S} & = & \displaystyle\int_{-2}^{0} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_{-2}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + 2\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_0 \\ & = & -\mathrm{e}^2 - 1 + 2\left(\mathrm{e}^2 - 1\right) \\ & = & \mathrm{e}^2 - 3 \qquad \text{u.a.} \end{array}$$

Exercice 2.

1. Nous avons une classe de 30 élèves dont 10 filles et 20 garçons.
   À chaque séance, le professeur interroge 3 élèves au hasard.

   A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons ».
   Le nombre total de façons de choisir 3 élèves parmi les 30 est donné par la combinaison suivante :

   $$\binom{30}{3} = \frac{30 \times 29 \times 28}{3 \times 2 \times 1} = 4060$$

   Pour que deux des trois élèves interrogés soient des garçons, nous devons choisir 2 garçons parmi les 20 et 1 fille parmi les 10. D'après le principe multiplicatif :

   $$\binom{20}{2} \times \binom{10}{1} = \frac{20 \times 19}{2 \times 1} \times 10 = 190 \times 10 = 1900$$

   Ainsi, la probabilité $P(A)$ est :

   $$P(A) = \frac{\binom{20}{2} \times \binom{10}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{1900}{4060} = \frac{95}{203}$$

   B. « Les trois élèves interrogés sont du même sexe ».
   Les cas possibles sont que tous les élèves sont des garçons ou toutes les filles.

   - Si les trois élèves sont des garçons, il y a $\binom{20}{3}$ façons de les choisir parmi les 20 garçons :

   $$\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

   - Si les trois élèves sont des filles, il y a $\binom{10}{3}$ façons de les choisir parmi les 10 filles :

   $$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

   D'après le principe additif, le nombre total de façons de choisir 3 élèves du même sexe est donc :

   $$\binom{20}{3} + \binom{10}{3} = 1140 + 120 = 1260$$

   Ainsi, la probabilité $P(B)$ est :

   $$P(B) = \frac{1260}{4060} = \frac{9}{29}$$

   C. « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés ».
   Cela signifie qu'il peut y avoir 0 ou 1 fille parmi les 3 élèves interrogés.

- Si il n'y a aucune fille (tous les 3 élèves sont des garçons), il y a $\binom{20}{3}$ façons de choisir les 3 garçons parmi les 20 :

$$\binom{20}{3} = 1140$$

- Si il y a une seule fille, il faut choisir 1 fille parmi les 10 et 2 garçons parmi les 20. Le nombre de façons de faire cela est :

$$\binom{10}{1} \times \binom{20}{2} = 10 \times \frac{20 \times 19}{2 \times 1} = 10 \times 190 = 1900$$

D'après le principe additif, le nombre total de façons où il y a au plus une fille est donc :

$$1140 + 1900 = 3040$$

Ainsi, la probabilité $P(C)$ est :

$$P(C) = \frac{3040}{4060} = \frac{152}{203}$$

2. Il y a 19 internes dans la classe, dont 4 filles. Nous choisissons 2 délégués de sexes différents.
D. « Les deux délégués sont internes ».
Le nombre total de façons de choisir 2 délégués de sexes différents est :

$$\binom{10}{1} \times \binom{10}{2} = 200$$

Sur les 19 internes, il y a 4 filles et 15 garçons.
Il y a alors $\binom{4}{1} \times \binom{15}{1} = 60$ choix possibles pour les deux délégués internes de sexes différents.
Ainsi, la probabilité $P(D)$ est :

$$P(D) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$$

3. E. « Un seul des deux délégués est interne ».
Cela signifie :
— Une fille interne et un garçon externe : $4 \times 5 = 20$
— Une fille externe et un garçon interne : $6 \times 15 = 90$

$$\text{Total cas favorables} = 20 + 90 = 110$$

$$P(E) = \frac{110}{200} = \frac{11}{20}$$

4. (a) L'expérience est la répétition de n épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
— soit c'est une élève qui efface le tableau avec la probabilité $p = \frac{1}{3}$ (probabilité du succès).
— soit c'est un élève qui efface le tableau avec la probabilité $q = \frac{2}{3}$ (probabilité de l'échec).

Si on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres n in connu et $p = \frac{1}{3}$.

$P_n = 1 - P(X=0)$ où $P(X=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^n$ soit :

$$P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(b) Nombre minimal de séances pour que $P_n > 0{,}9999$

Nous cherchons le plus petit n tel que :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0{,}9999$$

Cela revient à résoudre l'inégalité :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}0001$$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, l'ordre est donc conservé :

$$\ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) < \ln(0{,}0001)$$

$$n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(0{,}0001)$$

$$n > \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 22{,}7$$

Le nombre minimal de séances est donc $n = 23$.