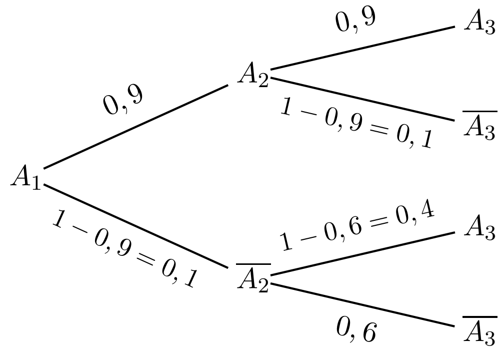
Exercice 1.

1. (a) On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines :



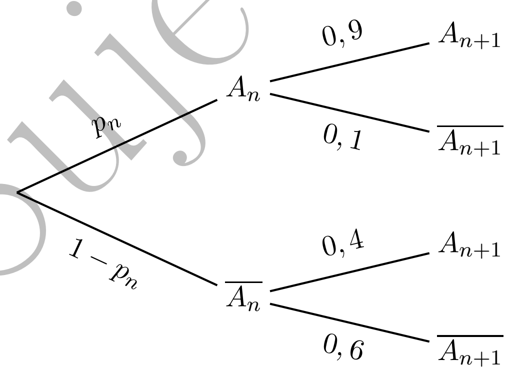
(b) A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de A_1, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2\cap A_3)+P\left(\overline{A_2}\cap A_3\right)\\ &= P(A_2)\times P_{A_2}(A_3)+P\left(\overline{A_2}\right)\times P_{\overline{A_2}}(A_3)\\ &= 0,9\times 0,9+0,1\times 0,4\\ &= 0,81+0,04\\ &= 0,85 \end{aligned}$$

(c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :

$P_{A_3}(A_2)=\dfrac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_3)}$ soit $P_{A_3}(A_2)=\dfrac{0,9\times 0,9}{0,85}\approx 0,95.$

2. (a) On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n\cap A_{n+1})+P\left(\overline{A_n}\cap A_{n+1}\right)\\ &= p_n\times 0,9+(1-p_n)\times 0,4\\ &= 0,5p_n+0,4\\ p_{n+1} &= 0,5p_n+0,4 \end{aligned}$$

(b) Voici le programme complété :

```
def suite_p(n) :
    p = 1
    for i in range(2,n+1) :
        p = 0.5*p+0.4
    return p
```

4. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $p_n > 0,8$.
   - **Initialisation.** On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$: $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   - **Hérédité.**
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $p_n > 0,8$.
     D'après l'hypothèse de récurrence, $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ et ainsi $0,5p_n + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{n+1} > 0,8$. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion.**
     $\mathscr{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 1 donne $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 0,5p_n + 0,4 - p_n \\ &= 0,4 - 0,5p_n \end{aligned}$$

   Or pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ puis $-0,5p_n < -0,4$ et enfin $0,4 - 0,5p_n < 0$.
   On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est décroissante.

   (c) — La suite (p_n) est décroissante.
   — Dé plus pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par $0,8$.

   D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0,8$.

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 \\ &= 0,5p_n + 0,4 - 0,8 \\ &= 0,5\,(v_n + 0,8) - 0,4 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,8 = 0,2$.

   (b) On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ donc $v_n = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

   (c) La suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite $0,8$.

Exercice 2.

I. Étude d'une fonction f

1. (a) u est dérivable $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$ on a $u'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x} > 0$ qui est la somme de termes positifs.
   La fonction u est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) On a $u(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$.
   On sait que la fonction u est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $u(1) = 0$ donc on en déduit que : $u > 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ et $u < 0$ sur $]0;\ 1[$.

2. Étude de la fonction f

   (a) Écrivons $\dfrac{\ln x}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \times \ln x$.
   On a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \times \ln x = -\infty$ et au final par différence des limites :
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

   (b) On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ (limites de cours), donc par différence des limites :
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

   (c) f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} \\ &= 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{u(x)}{x^3} \end{aligned}$$
   Donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ puisque $x^3 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   D'après la question **1. b.** on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ et
   $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$.
   D'où le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ avec $f(1) = 1$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Pour tout réel $x > 0$ on a $d(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$.
   On a $x^2 > 0$ donc $d(x)$ est su signe de $-\ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Or $-\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.
   De même $-\ln x = 0 \iff x = 1$ et $-\ln x < 0 \iff x > 1$ et on en déduit le signe de $d(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
signe de $d(x)$	||	$+$	0	$-$	

- Sur $]0\,;\,1[$, $d(x) > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ.
- sur $]1\,;\,+\infty[$, $d(x) < 0$ donc $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.
- $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes au point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.

II.Calculs d'aires

1. (a) On a vu que pour $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant x$; donc $\mathcal{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^\alpha \left(x - \left[x - \frac{\ln x}{x^2}\right]\right)\,\mathrm{d}x = \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   On pose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \ln x \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v(x) & = & -\dfrac{1}{x} \quad \text{par exemple} \end{array}\right.$$

   Avec u et v dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$ à dérivées continues, on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\alpha) &= \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^\alpha \\ &= -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 0 + 1 \\ &= 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

   (b) Comme $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$ (limite de cours) et $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$, on a alors

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \ell = 1.$$

2. e > 2, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \dfrac{1}{2} < 1$.

   On a vu que dans ce cas la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite (Δ), donc :

$$\mathcal{A}\,(\alpha) = \int_\alpha^1 \left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]\,\mathrm{dx}$$

   En intégrant par parties comme précédemment les fonctions étant dérivables sur $[\alpha\ ;\ 1]$, on obtient

$$\mathcal{A}\,(\alpha) = \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right]_\alpha^1 = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

   En particulier :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) &= 1 - \frac{\ln \frac{1}{\mathrm{e}}}{\frac{1}{\mathrm{e}}} - \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} \\ &= 1 - \frac{-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} - \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} \\ &= 1 \\ &= \ell \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. **Calcul d'un angle**

   (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   $\dfrac{-2}{-3} \neq \dfrac{2}{-1}$: les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) • $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ donc $AB^2 = 4+4+4 = 3\times 4$ et $AB = 2\sqrt{3}$ (vu que $AB > 0$) ;

   De même $AC^2 = 9+1+1 = 11$, donc $AC = \sqrt{11}$.

   (c) • D'une part $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6-2+2 = 6$;

   • D'autre part $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

   On a donc $6 = 2\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\cos\widehat{BAC} \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}\times\sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{33}}$.

   La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 58,51$, soit $58,5°$ au dixième près.

2. **Calcul d'une aire**

   (a) Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de $\mathcal{P}$. On a $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

   Avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$, on obtient :

   $-2(x+1)+2(y+1)-2(z-2) = 0 \iff -(x+1)+(y+1)-(z-2) = 0 \iff -x+y-z+2 = 0.$

   (b) La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ par exemple donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x &= 2-t\\ y &= t\\ z &= 3-t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Soit E le projeté orthogonal de C sur (AB) :le point E appartient donc au plan $\mathcal{P}$ et à la droite (AB) ; ses coordonnées vérifient donc l'équation de $\mathcal{P}$ et les équations paramétriques de (AB), donc le système :

   $\begin{cases} -x+y-z+2 &= 0\\ x &= 2-t\\ y &= t\\ z &= 3-t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; en remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation de $\mathcal{P}$ on obtient :

   $-2+t+t-3+t+2 = 0 \iff 3t-3 = 0 \iff t = 1$.

   On a donc E(1 ; 1 ; 2).

   (d) On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $BC^2 = 1+9+1 = 11$ et $BC = \sqrt{11}$.

   Comme $AC = BC = \sqrt{11}$, le triangle ABC est isocèle en C ; or on a vu que E est le projeté de C sur la droite (AB), donc dans le triangle isocèle (ABC), [CE] est la hauteur relative à la base [AB].

   On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, d'où $CE^2 = 1+4 = 8$ et $CE = 2\sqrt{2}$.

   L'aire du triangle (ABC) est donc égale à :

   $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB\times CE}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$ u.a.

3. **Calcul d'un volume**

(a) F $\in$ (ABC) $\iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, tels que : $\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & -2\alpha - 3\beta \\ -1 & = & 2\alpha - \beta \\ 0 & = & -2\alpha - \beta \end{array}\right. .$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières équations on obtient $-1 = -2\beta \iff \beta = \dfrac{1}{2}$ et en remplaçant β par $\dfrac{1}{2}$ dans la première équation $-1 = -2\alpha + \dfrac{3}{2} \iff 2\alpha = 1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2} \iff \alpha = -\dfrac{1}{4}$.

Donc $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: les quatre points A, B, C et F sont coplanaires.

(b) Avec $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$, on peut calculer :

$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 - 2 + 4 = 0$ et
$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 2 + 4 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à ce plan, ou encore la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).

(c) Si l'on choisit comme base le triangle (ABC), la hauteur de ce tétraèdre est donc [FD] et la volume est égal à :

$\mathcal{V}(\text{ABCD}) = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{ABC}) \times \text{FD}$

Avec $\text{FD}^2 = 4 + 4 + 16 = 24$, on trouve $\text{FD} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$, d'où :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{V}(\text{ABCD}) & = & \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \\ & = & \dfrac{4 \times 6}{3} \\ & = & 8 \text{ u.v} \end{array}$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' - y = \mathrm{e}^x.$$

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \\ u'(x) - u(x) &= \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

   u est donc une solution de (E).

2. (E_0) : $\quad y' - y = 0 \iff y' = y$: les solutions de (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto C\mathrm{e}^x$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Toutes les solutions de (E) sont donc les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\boxed{x \longmapsto (C + x)\mathrm{e}^x, \; C \in \mathbb{R}}$$

4. On pose $f_2(x) = (C + x)\mathrm{e}^x$.
   $f_2(0) = 2 \iff C = 2$ et ainsi :

$$f_2(x) = (x + 2)\mathrm{e}^x$$

5. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $g'(x) = \mathrm{e}^x + (x + k)\mathrm{e}^x$ soit $g'(x) = (x + k + 1)\mathrm{e}^x$.
   De même g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(x) = (x + k + 2)\mathrm{e}^x$.
   Pour tout réel x on a $\mathrm{e}^x > 0$ donc $g''(x)$ est du signe de $x + k + 2$.
   Or $x + k + 2 = 0 \iff x = -k - 2$: on en déduit le signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-k-2$		$+\infty$
signe de $g'('x)$		$-$	0	$+$	

   g change de convexité au point d'abscisse $-k - 2$ et $g(-k - 2) = (-k - 2 + 2)\mathrm{e}^{-2-k} = -2\mathrm{e}^{-2-k}$: le point $A_k(-2 - k\,;\, -2\mathrm{e}^{-2-k})$ est l'unique point d'inflexion de $\mathscr{C}_g$.