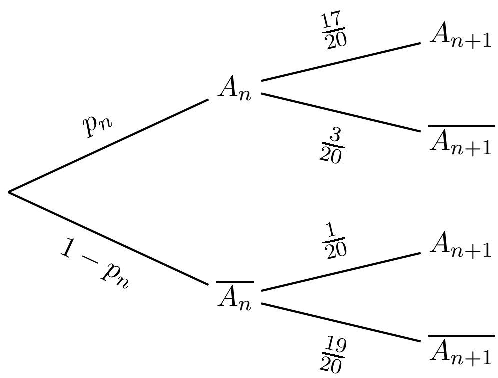
Exercice 1.

1. On a dans l'urne U_1, 17 boules blanches et 3 noires soit 20 boules au total, donc $p_2 = \dfrac{17}{20} = 0,85$.
2. (a) On s'aide d'un arbre. Pour obtenir p_{n+1} il faut considérer les cas où l'on a tiré au rang précédent une boule blanche :



A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{array}{rcl} P(A_{n+1}) & = & P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) \\ & = & \dfrac{17}{20}p_n + (1-p_n) \times \dfrac{1}{20} \\ & = & 0,5p_n + 0,4 \\ p_{n+1} & = & \dfrac{16}{20}p_n + \dfrac{1}{20} \\ & = & 0,8p_n + 0,05 \end{array}$$

(b) Voici le programme complété :

```
def suite_p(n) :
    p = 1
    for i in range(2,n+1) :
        p = 0.8*p+0.05
    return p
```

3. On a avec la relation de récurrence établie précédemment $p_3 = 0,8p_2 + 0,05$ soit $p_3 = 0,8 \times 0,85 + 0,05 = 0,73$.
4. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $p_n > 0,25$.
   - **Initialisation.** On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,25$: $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   - **Hérédité**
     Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $p_n > 0,25$.
     D'après l'hypothèse de récurrence, $p_n > 0,25$ donc $0,8p_n > 0,2$ et donc $0,8p_n + 0,05 > 0,25$ qui signifie $p_{n+1} > 0,25$. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     $\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang 1 donne $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} - p_n & = & 0,8p_n + 0,05 - p_n \\ & = & -0,2p_n + 0,05 \end{array}$$

$p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05$.
Or on vient de démontrer que $p_n > 0,25$ qui entraîne
$-0,2p_n < -0,2 \times 0,25$ soit $-0,2p_n < -0,05 \iff -0,2p_n + 0,05 < 0$.
On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$, cela prouve que la suite (p_n) est décroissante

(c) La suite (p_n) est décroissante et minorée par $0,25$: elle donc convergente vers un réel ℓ supérieur ou égal à $0,25$.

(d) Les suites (p_n) et (p_{n+1}) ayant la même limite ℓ, la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$ donne $\ell = 0,8\ell + 0,05$.

(e) $\ell = 0,8\ell + 0,05 \iff 0,2\ell = 0,05 \iff$
$\ell = \dfrac{0,05}{0,2} = 0,25$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \to +\infty} p_n = 0,25 = \frac{1}{4}.$$

On en déduit qu'à long terme, la probabilité que le tirage se fasse dans dans l'urne U_1 se limitera à $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2.

1. (a) Pour étudier le signe de $\ln x(1 - \ln x)$, on étudie le signe de $\ln x$ puis celui de $1- = \ln x$.
   - Pour $\ln x$: $\ln x > 0 \iff x > 1$.
     De même $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$ et $\ln x = 0 \iff x = 1$.
   - Pour $1 - \ln x$: $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff 0 < x < \mathrm{e}$. De même $1 - \ln x < 0 \iff x > \mathrm{e}$ et $1 - \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}$.

   On en déduit le tableau de signe de $\ln x(1 - \ln x)$:

x	0		1		e		$+\infty$
signe de $\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
signe de $1 - \ln x$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
signe de $\ln x(1 - \ln x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

   (b) On a $f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = \ln x(1 - \ln x)$.
   On déduit du tableau précédent que $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{C}'$ sauf entre 1 et e.

2. $M(x\ ;\ \ln x)$ et $N\left(x\ ;\ (\ln x)^2\right)$.

   (a) On a déjà vu que $h(x) = \ln x(1 - \ln x)$.
   h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & \dfrac{1}{x} \times (1 - \ln x) + \ln x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) \\ & = & \dfrac{1}{x} - \dfrac{2\ln x}{x} \\ & = & \dfrac{1 - 2\ln x}{x} \end{array}$$

Pour tout réel $x > 0$, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$.

— $1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < \dfrac{1}{2} \iff 0 < x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. De même $1 - 2\ln x < 0 \iff x > \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $1 - 2\ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

On en déduit donc que : h est croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty[$.

(b) Le résultat précédent montre la fonction h a un extremum (la dérivée s'annule en changeant de signe), qui est un maximum pour $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.
Comme ce nombre est entre 1 et e, (car $1 < \mathrm{e} < \mathrm{e}^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{\mathrm{e}} < \mathrm{e}$) le nombre $h(x)$ est positif.
Donc $MN = h\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\sqrt{\mathrm{e}}\,(1 - \ln\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

(c) On pose $X = \ln x$ et l'équation devient $X^2 - X - 1 = 0$.
$\Delta = 5 > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles distinctes $X_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \ln x_1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \ln x_2$.
On a donc finalement deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ et } x_2 = \mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}$$

(d) Sur $]0\,;\,1[\cup]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ la fonction $(\ln x)^2 - \ln x$ est positive et représente donc la distance MN.
D'après la question précédente il existe deux valeurs de x pour lesquelles la distance $MN = 1$.
Ce sont les réels $x_2 = a = \mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $x_1 = b = \mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, avec $a < b$.

3. (a) On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = 1$ alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = x$ par exemple avec u et v dérivables sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ à dérivées continues sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x &= [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x\\ &= [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - [x]_1^{\mathrm{e}}\\ &= 1\end{aligned}$$

(b) G est dérivable et pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}G'(x) &= (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + x\left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right)\\ &= (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2\\ &= (\ln x)^2\\ &= g(x)\end{aligned}$$

Ainsi G est une primitive de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

(c) Sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ on a vu que $\ln(x) - (\ln x)^2 \geqslant 0$, donc l'aire $\mathcal{A}$ est égale à $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln x - (\ln x)^2\right]\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 1 - [G(x)]_1^{\mathrm{e}}\\ &= 1 - G(\mathrm{e}) + G(1)\\ &= 3 - \mathrm{e} \quad (\text{u. a.})\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+7-3 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est donc rectangle en A.

   (b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 5-6+12 = 11$.

   $BA = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{11}$ et $BC = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{77}$

   (c) On cherche la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

   On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right) &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{77}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff 11 = \sqrt{11}\times\sqrt{11}\times\sqrt{7}\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)\\ &\iff \cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$

   La calculatrice donne $\widehat{ABC}\approx 68°$ au degré près.

2. (a) On veut démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

   Un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle rectangle.

   De plus $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times(-1)-1\times 1-1\times(-3) = -2-1+3 = 0$

   et

   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 4-1\times 7-1\times 1 = 8-7-1 = 0$

   $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal de ce plan et du plan $\mathscr{P}$.

   Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

   (b) On déduit une équation cartésienne du plan (ABC).

   Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $2x-y-z+d=0$, comme A appartient à ce plan, on a : $5+d=0$ soit $d=-5$.

   Une équation de (ABC) est donc $2x-y-z-5=0$.

   (c) On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

   Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{n}$

   On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathcal{D} \iff \overrightarrow{EM} = t\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl}x-1 &=& 2t\\ y-2 &=& -t,\quad t\in\mathbb{R}\\ z-4 &=& -t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}x &=& 1+2t\\ y &=& 2-t,\quad t\in\mathbb{R}.\\ z &=& 4-t\end{array}\right.$$

   (d) On démontre que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

   H correspond à l'intersection du plan (ABC) avec la droite perpendiculaire à (ABC) qui passe par E soit la droite $\mathcal{D}$, les coordonnées de H seront donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2x-y-z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \\ 6t-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ x = 4 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
   On va calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ unités de volume.
   $\text{AC} = \sqrt{4^2+7^2+1^2} = \sqrt{66}$ et donc $\mathscr{B} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} = \dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{66}}{2} = \dfrac{11\sqrt{6}}{2}$
   HE est la hauteur de la pyramide et $\overrightarrow{\text{HE}}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
   On a par suite $\text{HE} = \sqrt{(-3)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$ puis
   $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{11\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{\dfrac{27}{2}} = \dfrac{11\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times 3\sqrt{3}}{3\times 2\times\sqrt{2}} = \dfrac{33}{2} = 16,5$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} \\ u'(x) - 2u(x) &= \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{2x} \\ &= \mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

   u est donc une solution de (E).

2. $(\mathrm{E}_0): \quad y' - 2y = 0 \Longleftrightarrow y' = 2y$: les solutions de (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto C\mathrm{e}^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Toutes les solutions de (E) sont donc les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\boxed{x \longmapsto (C + x)\mathrm{e}^{2x},\ C \in \mathbb{R}}$$

4. On pose $f_3(x) = (C + x)\mathrm{e}^{2x}$.
   $f_3(0) = 3 \Longleftrightarrow C = 3$ et ainsi :

$$f_3(x) = (x + 3)\mathrm{e}^{2x}$$

5. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + k)\mathrm{e}^{2x}$.
   Calculons la limite de g en $-\infty$.
   On a une FI du type « $\infty - \infty$ donc on change d'écriture.
   Pour tout réel x : $g(x) = x\mathrm{e}^{2x} + k\mathrm{e}^{2x}$ donc $g(x) = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x} + k\mathrm{e}^{2x}$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x}$ (limite de cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} \times k\mathrm{e}^{2x} = 0$ d'où par somme des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ donc on en déduit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction g au voisinage de $-\infty$.