

Exercice 1.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ où :

$$\mathcal{P}_n : \ll u_n = 5^n + 2n - 1 \gg$$

- **Initialisation.** Si $n = 0$, on a dans le membre de gauche $u_0 = 0$ et dans le membre de droite $5^0 + 2 \times 0 - 1 = 0$, d'où $\mathcal{P}_0$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $u_n = 5^n + 2n - 1$) et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $u_{n+1} = 5^{n+1} + 2n + 1$).

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 8n + 6 \\ &= 5(5^n + 2n - 1) - 8n + 6 \\ &= 5^{n+1} + 10n - 5 - 8n + 6 \\ &= 5^{n+1} + 2n + 1 \end{aligned}$$

d'après l'énoncé

d'après H.R.

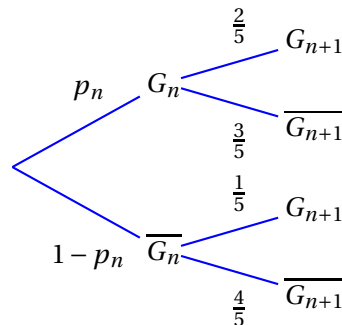
D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 5^n + 2n - 1$$

Exercice 2.

1. Voici l'arbre complet :



2. (a) G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbf{P}(G_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}(G_n) \times \mathbf{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{G_n}) \times \mathbf{P}_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= \frac{2}{5}p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) \\ &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

- (b) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}_n$ où :

$$\mathcal{P}_n : \ll p_n \geq \frac{1}{4} \gg$$

— **Initialisation.** Si $n = 1$, $p_1 = 1 \geq \frac{1}{4}$, d'où $\mathcal{P}_1$.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ (i.e. $p_n \geq \frac{1}{4}$) et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$ (i.e. $p_{n+1} \geq \frac{1}{4}$).

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} p_n \geq \frac{1}{4} &\implies \frac{1}{5}p_n \geq \frac{1}{20} \quad \text{car } \frac{1}{5} > 0 \\ &\implies \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{20} + \frac{1}{5} \\ &\implies p_{n+1} \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \geq \frac{1}{4}$$

- (c) À la calculatrice, il semble que la limite de la suite (p_n) soit $\frac{1}{4}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{5}u_n \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, donc :

$$u_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

Par ailleurs, $u_n = p_n - \frac{1}{4} \iff p_n = u_n + \frac{1}{4}$, on a donc finalement :

$$p_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

Partie B

1. (a) Les paramètres de cette loi binomiale sont $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

(b) On cherche $\mathbf{P}(X \geq 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbf{P}(X = 0) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \\ &\approx 0,943 \\ &\approx 0,94 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est environ égale à 0,94.

(c) On a $\mathbf{E}(X) = n \times p$, donc $\mathbf{E}(X) = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5$.

2. Pour réaliser un bénéfice supérieur à 40 €, vu la mise de 30 €, il faut gagner plus de 70 €. Comme $8 \times 8 = 64$, il faut gagner au moins 9 parties sur 10 ($9 \times 8 = 72$).

On cherche donc $\mathbf{P}(X \geq 9)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geq 9) &= 1 - \mathbf{P}(X < 9) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X \leq 8) \\ &\approx 0,00003 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un joueur réalise un bénéfice supérieur à 40 € est environ égale à 0,00003 à 10^{-5} près.