★☆☆☆☆ **Exercice 1** **5 points**

1. On reconnaît une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on change d'écriture.
   Soit $n > 0$: $-2n^2 + 8n - 5 = n^2\left(-2 + \dfrac{8}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right)$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2 + \dfrac{8}{n} - \dfrac{5}{n^2} = -2\end{array}\right\} \overset{\text{par produitdes limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2\left(-2 + \frac{8}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = -\infty.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 + 8n - 5 = -\infty$.
2. $-1 < \dfrac{12}{13} < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{12}{13}\right)^n = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\left(\dfrac{12}{13}\right)^n + 200 = 200$.
3. On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ » donc on change d'écriture.
   $4n - \sqrt{n} = n\left(4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 4\end{array}\right\} \overset{\text{par produitdes limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to+\infty} n\left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n - \sqrt{n} = +\infty$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1$ puis $4^n - 1 \leqslant 4^n + \cos(2n) \leqslant \cancel{4^n + 1}$.
   $4 > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n - 1 = +\infty$: d'après le théorème de comparaison des limites on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n + \cos(2n) = +\infty$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ puis $-2 \leqslant 2(-1)^n \leqslant 2$ et enfin :
   $\cancel{-2 - n} \leqslant 2(-1)^n - n \leqslant 2 - n$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - n = -\infty$: d'après le théorème de comparaison des limites on a alors :
   $$\lim_{n\to+\infty} 2(-1)^n - n = -\infty$$
   .

★★★☆☆ **Exercice 2** **8 points**

Partie A : conjecture

1. On a :
   $$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$
   De même :
   $$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3\times\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{23}{8}\end{aligned}$$

2. À la calculatrice, on obtient :
   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{383}{128} \approx 2,99219$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \approx 2,99997$
3. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : validation des conjectures

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 \\ &= -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2 \\ &= -\frac{1}{2}v_n^2 \end{aligned}$$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n$ où :

$$\mathscr{P}_n : -1 \leqslant v_n \leqslant 0$$

   - Initialisation : si $n = 0$ alors $v_0 = u_0 - 3$ donc $v_0 = -1$ d'où $\mathscr{P}_0$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ (i.e $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$).
     Montrons alors $\mathscr{P}_{n+1}$ (i.e $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$).
     Par hypothèse de récurrence, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0 \implies 0 \leqslant v_n^2 \leqslant 1$
     $\implies -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_n^2 \leqslant 0$
     $\implies -1 \leqslant -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence :
     $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant v_n \leqslant 0.$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n \\ &= -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \end{aligned}$$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.
   De même : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0 \implies -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$
   $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$
   $\implies \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$

$$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \implies -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 0$.

5. On résout l'équation $x = -\frac{1}{2}x^2$.

$$\begin{aligned} x = -\frac{1}{2}x^2 &\iff x + \frac{1}{2}x^2 = 0 \\ &\iff x\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Mais on sait que $\ell \in [-1\,;0]$ donc ne peut pas avoir $\ell = -2$.
Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= v_{n+1} + 3 - v_n - 3 \\ &= v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

Or la suite (v_n) est croissante donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ ce qui implique que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc que la suite (u_n) est croissante.
De plus, la suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.
Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

★★☆☆☆ Exercice 3 — 7 points

1. On calcule v_1.

$$\begin{aligned} v_1 &= 1{,}6v_0 - 1{,}6v_0^2 \\ &= 1{,}6 \times 0{,}3 - 1{,}6 \times 0{,}3^2 \\ &= 0{,}336 \end{aligned}$$

Au bout d'un mois il y aura 0,336 million d'insectes soit 336 000.

2. (a) Résolvons l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1{,}6x - 1{,}6x^2 = x \\ &\iff 0{,}6x - 1{,}6x^2 = 0 \\ &\iff x(0{,}6 - 1{,}6x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0{,}6 - 1{,}6x = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0{,}6}{1{,}6} = 0{,}375 \end{aligned}$$

$S_{\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]} = \{0\,;0{,}375\}$.

(b) On étudie les variations de f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $f'(x) = 1{,}6 - 3{,}2x$.

Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} &\implies 0 \geqslant -3{,}2x \geqslant -1{,}6 \\ &\implies 1{,}6 \geqslant f'(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

3. (a) Soit $\mathscr{P}_n$: « $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$. ».

— Initialisation : On a $v_0 = 0,5$ et $v_1 = 0,336$.
On a bien $0 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant \frac{1}{2}$ d'où $\mathscr{P}_0$.

— Hérédité : soit n un entier naturel . On suppose $\mathscr{P}_n$ (i.e $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$).
Montrons alors que $\mathscr{P}_{n+1}$ (i.e $0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$).
Par hypothèse de récurrence :
$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow f(0) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$ f est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$

$\Longrightarrow 0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0,4$ car $f(0) = 0$, $f(v_{n+1}) = v_{n+2}$, $f(v_n) = v_{n+1}$), $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,4$

$\Longrightarrow 0 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 0,4 \leqslant 0,5$
D'où $\mathscr{P}_{n+1}$.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$$

(b) — $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est donc décroissante.
— $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n$: la suite (v_n) est donc minorée par 0.
— La suite (v_n) converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$.

(c) L'énoncé nous précise que la limite ℓ de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$ dont les solutions sont $x = 0$ ou $x = 0,375$.
Or $v_0 = 0,3$ et la suite (v_n) est décroissante donc ℓ ne peut être égale à $0,375$ et donc $\ell = 0$.

(d) Ce résultat suggère que les insectes seront en voie de disparition puisque leur nombre se rapprochera de à.