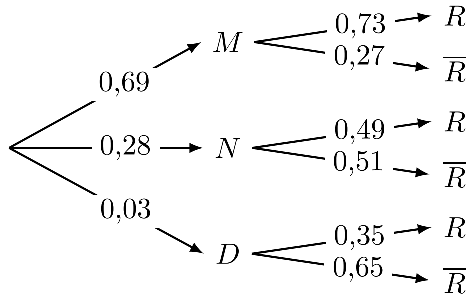
Exercice 1.

Partie A.

1. Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

   $\mathbf{P}(D \cap R) = \mathbf{P}(D) \times \mathbf{P}_D(R) = 0{,}03 \times 0{,}35 = 0{,}0105$.

3. $\mathbf{P}\left(M \cap \overline{R}\right) = \mathbf{P}(M) \times \mathbf{P}_M\left(\overline{R}\right) = 0{,}69 \times 0{,}27 = 0{,}1863$.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements M, N et D forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(R) &= \mathbf{P}(R \cap M) + \mathbf{P}(R \cap N) + \mathbf{P}(R \cap D) \\
&= \mathbf{P}(M) \times \mathbf{P}_M(R) + \mathbf{P}(N) \times \mathbf{P}_N(R) + \mathbf{P}(D) \times \mathbf{P}_D(R) \\
&= 0{,}69 \times 0{,}73 + 0{,}28 \times 0{,}49 + 0{,}03 \times 0{,}35 \\
&= 0{,}6514
\end{aligned}$$

   On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité recherchée est : $\mathbf{P}_R(N)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_R(N) &= \frac{\mathbf{P}(R \cap N)}{\mathbf{P}(R)} \\
&= \frac{0{,}28 \times 0{,}49}{0{,}6514} \\
&\approx 0{,}2106 \quad \text{au dix-millième près}
\end{aligned}$$

Partie B.

1. (a) L'expérience est la répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :

   - soit le déchet est recyclable avec la probabilité $p = 0{,}6514$ (probabilité du succès) ;
   - soit le déchet n'est pas recyclable avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}3586$ (probabilité de l'échec).

   X comptant le nombre de succès, c'est-à-dire, le nombre de déchets recyclables parmi les 20 déchets, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}6514$.

   (b) On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

   $\mathbf{P}(X = 14) = \binom{20}{14} 0{,}6514^{14} \times 0{,}3586^{6}$ soit $\mathbf{P}(X = 14) \approx 0{,}1723$ au dix-millième près.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\ ;\ 0.6514)$
   (a) On a $p_n = \mathbf{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0} 0{,}6514^0 \times 0{,}3586^n$ soit $p_n = 0{,}3486^n$.
   La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est $p_n = 0{,}3486^n$
   (b) L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre $1 - 0{,}3486^n \geqslant 0{,}9999$.
   À la calculatrice $1 - 0{,}3486^8 < 0{,}9999$ et $1 - 0{,}3486^9 > 0{,}9999$: on retient donc la valeur $n = 9$.
   On en déduit que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 2.

1. On a :
   - $a_1 = a_0 - \frac{15}{100}a_0 + \frac{10}{100}b_0 = 1700 - 255 + 130 = 1575$
   - $b_1 = b_0 - \frac{10}{100}b_0 + \frac{15}{100}a_0 = 1300 - 130 + 255 = 1425$
2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n,
$$a_n + b_n = 3000$$
3. Pour tout entier naturel n on a $a_{n+1} = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}b_n$.
   Or $a_n + b_n = 3000$ donc $b_n = 3000 - a_n$.
   Il vient alors :
$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3000 - a_n) \\ & = & a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3000 - \frac{10}{100}a_n \\ & = & 0{,}75a_n + 300 \end{array}$$
4. (a) Soit $\mathscr{P}_n$: $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.
   - **Initialisation :** $a_0 = 1700$ et $a_1 = 1575$ donc $1200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1700$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** soit n$\in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie, soit $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$ et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$.
     Par hypothèse de récurrence :
     $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$
     $\Longrightarrow 0{,}75 \times 1200 \leqslant 0{,}75 \times a_{n+1} \leqslant 0{,}75 \times a_n \leqslant 0{,}75 \times 1700$
     $\Longrightarrow 900 \leqslant 0{,}75 \times a_{n+1} \leqslant 0{,}75 \times a_n \leqslant 1275$
     $\Longrightarrow 900 + 300 \leqslant 0{,}75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0{,}75 \times a_n + 300 \leqslant 1275 + 300$
     $\Longrightarrow 1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1575$
     Or $1575 \leqslant 1700$ donc $1200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1700$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :** $\mathscr{P}_0$ est vraie au rang 0 et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$ donc on en déduit que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n c'est-à-dire : $1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1700$.

   (b)
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1200 \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est minorée par 1200.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente. vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 1200$.

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 1200 \\ &= 0{,}75a_n + 300 - 1200 \\ &= 0{,}75a_n - 900 \\ &= 0{,}75\left(a_n - \frac{900}{0{,}75}\right) \\ &= 0{,}75\left(a_n - 1200\right) \\ &= 0{,}75v_n \end{aligned}$$

$v_0 = a_0 - 1200 = 1700 - 1200 = 500$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}75$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times q^n$ soit $v_n = 500 \times 0{,}75^n$.

(c) On sait que, pour tout entier naturel n, $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200$.

6. (a) $-1 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$;

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0{,}75^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1200$.

(b) On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va se limiter à 1200 adhérents, et donc que le nombre de sportifs dans le club B se limitera à $3000 - 1200 = 1800$ adhérents.

7. (a) On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1280.

```
def   seuil() :
      n = 0
      A = 1700
      while A>=1280 :
          n=n+1
          A = 0.75*A + 300
      return n
```

(b) La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 1280$. À la calculatrice on a $a_6 > 1280$ et $a_7 < 1280$ donc la valeur de n renvoyée par la fonction `seuil` est 7.

Exercice 3.

Partie A

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donné par le signe de la dérivée f' : la courbe représentative de la fonction f' coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse 0,4 et 2,6

x	$-\infty$		0,4		2,6		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la dérivée f' est croissante, soit sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[2\,;\,+\infty[$.

Partie B.

1. (a) On calcule la limite de la fonction f en $+\infty$.

Pour le trinôme x^2-5x+6 on a une forme indéterminée du type $\ll \infty-\infty \gg$, on change d'écriture. Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)\mathrm{e}^x$.

$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = 1\end{array}\right\} \implies \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$ donc par produit des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)\mathrm{e}^x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) On calcule la limite de la fonction f en $-\infty$: on a une forme indéterminée du type $\ll \infty\times 0 \gg$, on change d'écriture.

On a $f(x) = x^2\mathrm{e}^x - 5x\mathrm{e}^x + 6\mathrm{e}^x$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ (limite de cours) et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (limite de cours) donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -5x\mathrm{e}^x = 0$.
Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 6\mathrm{e}^x = 0$ et par somme des limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x - 5x\mathrm{e}^x + 6\mathrm{e}^x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (2x-5)\,\mathrm{e}^x + \left(x^2-5x+6\right)\times\mathrm{e}^x \\ & = & \left(2x-5+x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x \\ & = & \left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x \end{array}$$

3. Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, on étudie le signe de $f'(x)$.

Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2-3x+1.

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 1 = 5 > 0$.

Le trinôme a deux racines réelles distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$:

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ et $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

4. La tangente (T_0) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite : $y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$.
   - $f(x) = \left(x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x$ donc $f(0) = 6\mathrm{e}^0 = 6$
   - $f'(x) = \left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x$ donc $f'(0) = 1\mathrm{e}^0 = 1$

(T_0) a pour équation réduite $y = 1\,(x-0)+6$ soit $y = x+6$.

5. (a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on étudie le signe de $f''(x)$. Pour tout réel x on a $\mathrm{e}^x > 0$ donc f"(x) est du signe de $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ trinôme de degré 2 de racines $x' = -1$ et $x'' = 2$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f'		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		convexe		concave		convexe	

(b) Sur $[-1\,;\,2]$, la fonction f est concave donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente (T_0) car $0 \in [-1\,;\,2]$.
Donc, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$, on a $f(x) \leqslant x + 6$.

Exercice 4.

1. On a directement $\mathrm{P}(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $\mathrm{Q}(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

2. (a) $\overrightarrow{\mathrm{JK}}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ on a donc $\overrightarrow{\mathrm{QR}} = 2\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont colinéaires et donc que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

(b) Démontrons que les points P,Q et R ne sont pas alignés.
On a $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PJ}}\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$.
Supposons les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PJ}}$ colinéaires : il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{PJ}}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{lll} -2 & = & 4k \\ 0 & = & 4k \\ 2 & = 0 & \end{array}\right.$$

Cette dernière égalité est absurde car $2 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PJ}}$ ne sont pas colinéaires. Les points P, Q et J ne sont pas alignés et définissent un plan de l'espace.

(c) Pour savoir si les points P, R, J et Q sont coplanaires on teste si les vecteurs $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PJ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont coplanaires.

Cherchons alors les éventuels réels α et β tels que $\overrightarrow{PR} = \alpha\overrightarrow{PJ} + \beta\overrightarrow{PQ}$ où $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$

ce qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} -2 & = & 4\alpha - 2\beta \\ 4 & = & 4\alpha \\ 6 & = 2\beta \end{cases}$$

Il vient alors : $\begin{cases} -2 & = & 4\times 1 - 2\times 3 \\ \alpha & = & 1 \\ \beta & = 3 \end{cases}$ ce qui est cohérent.

Ainsi $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PJ} + 3\overrightarrow{PQ}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PJ}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont coplanaires et par suite les points P, R, J et Q sont coplanaires.

3. Voici la section du cube par le plan (PQR) : il s'agit de l'hexagone RLKJPQ.