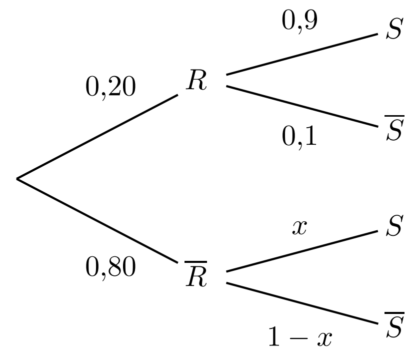
Exercice 1.

Partie A.

1. Voici l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation :



2. R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S) &= \mathbf{P}(R\cap S)+\mathbf{P}\left(\overline{R}\cap S\right)\\ &= \mathbf{P}(R)\times\mathbf{P}_R(S)+\mathbf{P}(\overline{R})\times\mathbf{P}_{\overline{R}}(S)\\ &= 0{,}2\times 0{,}9+0{,}8x\\ &= 0{,}18+0{,}8x\end{aligned}$$

Or $\mathbf{P}(S)=0{,}82$ d'après l'énoncé donc $0{,}18+0{,}8x=0{,}82$ soit $x=\dfrac{0{,}82-0{,}18}{0{,}8}=0{,}8$.

3. On cherche $\mathbf{P}_S(R)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_S(R) &= \frac{\mathbf{P}(S\cap R)}{\mathbf{P}(S)}\\ &= \frac{0{,}18}{0{,}82}\\ &\approx 0{,}22 \quad \text{au centième près}\end{aligned}$$

.

Partie B.

1. (a) L'expérience est la répétition de 5 épreuves identiques et indépendantes où seuls deux cas sont possibles :
   - soit la personne est satisfaite de son achat avec la probabilité $p=0{,}82$ (probabilité du succès) ;
   - soit elle ne l'est pas avec la probabilité $q=1-p=0{,}18$ (probabilité de l'échec).

   X comptant le nombre de succès, c'est-à-dire, le nombre de personnes satisfaites de leur achat parmi les 5 personnes, X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}82$.

   (b) On cherche $\mathbf{P}(X\leqslant 3)$.
   La calculatrice donne directement $\mathbf{P}(X\leqslant 3)\approx 0{,}222$.

2. (a) On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat. Dans ce cas X suit la loi binomiale de paramètres n inconnu et $p=0{,}82$.
   On a $p_n=\mathbf{P}(X=n)=\binom{n}{n}0{,}82^n\times 0{,}18^0=0{,}82^n$ donc la probabilité que les n acheteurs soient satisfaits est égale à $0{,}82^n$.

   (b) Déterminons les entiers naturels n tels que $p_n<0{,}01$.
   Á la calculatrice $p_{23}>0{,}01$ et $p_{24}<0{,}01$ donc on retient $n=24$
   Il faut donc au minimum 24 acheteurs pour que moins de 1 % des acheteurs soient tous satisfaits..

Exercice 2.

1. (a) $u_1 = 5u_0 - 4\times 0 - 3$ donc $u_1 = 5\times 3 - 0 - 3 = 12$.
   (b) $u_2 = 5u_1 - 4\times 1 - 3$ donc $u_2 = 53$.
   (c) Il semble que la suite (u_n) soit croissante et que sa limite soit $+\infty$.

2. (a) Soit $P_n : u_n \geqslant n+1$.
   - **Initialisation** : $u_0 = 3$ et $0+1=1$.
     $3 \geqslant 1$ donc P_0 est vraie.
   - **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons P_n vraie au rang $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence :
     $$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\implies 5u_n \geqslant 5(n+1)\\ &\implies 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n+5-4n-3\\ &\implies u_{n+1} \geqslant n+2\end{aligned}$$
     P_{n+1} est vraie
   - *Conclusion* : P_0 est vraie et P_n est héréditaire à partir du rang $n=0$, donc P_n est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n+1$.

   (b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n+1$, d'après le théorème de comparaison des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1\\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1\\ &= 5u_n - 5n - 5\\ &= 5\left(u_n - n - 1\right)\\ &= 5v_n\end{aligned}$$
   La suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $q=5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.
   (b) Puisque (v_n) est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :
   $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n$ soit $v_n = 2\times 5^n$.
   (c) $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$.
   On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\times 5^n + n + 1$.
   (d) Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} - u_n = 4u_n - 4n - 3$.
   Pour tout entier naturel n on a prouvé que $u_n \geqslant n+1$ donc $4u_n \geqslant 4n+4$ puis $4u_n - 4n - 3 \geqslant 1$ ce qui prouve que $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc que la suite (u_n) est croissante.

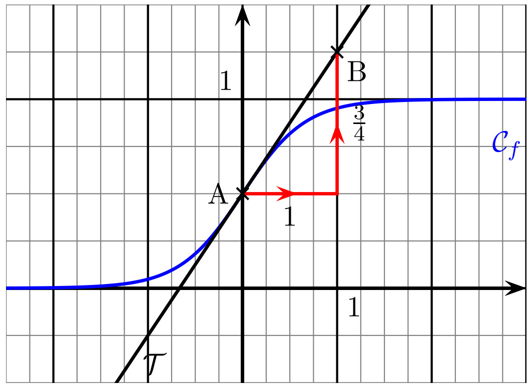
4. (a) Voici le programme complété :

```
def suite():
  u=3
  n=0
  while u<10**7:
    u= 5*u-4*n-3
    n=n+1
  return n
```

   (b) On utilise la calculatrice : $u_9 < 10^7$ et $u_{10} > 10^7$ donc la valeur renvoyée par cette fonction est $n=10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}.$$



Partie A : lectures graphiques

1. Comme indiqué sur la figure pour aller de A en B points de la tangente : $+\,1$ puis $+\dfrac{3}{4}$, donc coefficient directeur de $\dfrac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est égale à $\dfrac{1}{2}$ donc (T_0) : $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.
2. La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,; 0]$ et concave sur $[0\,; +\infty[$.

Partie B : étude de la fonction

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, donc $1 + \mathrm{e}^{-3x} > 1 > 0$ et $\left(1 + \mathrm{e}^{-3x}\right)^2 > 0$ ainsi $f'(x) > 0$, sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculons la limite de f en $-\infty$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty \\ \lim\limits_{T\to+\infty} \mathrm{e}^T = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty.$$
   Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$ et donc par inverse des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   (b) Calculons la limite de f en $+\infty$.
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} \mathrm{e}^T = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par composition des limites}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = 0.$$
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-3x} = 1$ et donc par inverse des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$: la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
3. On dresse le tableau complet de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variation de f	0	0,99	1

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($]0\,;\,1[$ intervalle image de $\mathbb{R}$ par la fonction f).
- $0{,}99 \in]0\,;\,1[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}99$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

4. - On localise α à l'unité : $f(1) < 0{,}99$ et $f(2) > 0{,}99$ donc $1 < \alpha < 2$.
   - On localise α au dixième : $f(1{,}5) < 0{,}99$ et $f(1{,}6) > 0{,}99$ donc $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.
   - On localise α au centième : $f(1{,}53) < 0{,}99$ et $f(1{,}54) > 0{,}99$ donc $1{,}53 < \alpha < 1{,}54$.
   - Enfin, on localise α au millième : $f(1{,}531) < 0{,}99$ et $f(1{,}532) > 0{,}99$ donc $1{,}531 < \alpha < 1{,}532$

   D'après la méthode de balayage $\alpha \approx 1{,}53$ au centième près.

Partie C : Tangente et convexité

1. On a $(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{3}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$.
   On en déduit que $(T_0) : y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout réel x on a $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3 > 0$.
   Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $\mathrm{e}^{-3x} - 1$.
   Or,
   - $\mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} > \mathrm{e}^0 \iff -3x > 0 \iff \iff x < 0\,;$
   - $\mathrm{e}^{-3x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} < \mathrm{e}^0 \iff -3x < 0 \iff \iff x > 0.$
   - $\mathrm{e}^{-3x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} = 1 \iff -3x = \mathrm{e}^0 \iff \iff x = 0\,;$

   On en déduit le signe de f'' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

3. (a) La question précédente a montré que la dérivée seconde est positive sur $]-\infty\,;\,0]$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.
   (b) La dérivée seconde s'annule en $x = 0$ en changeant de signe, donc le point A de la courbe représentative d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (c) f est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ donc $\mathcal{C}_f$ se situe au dessus de chacune de ses tangentes sut cet intervalle.
   La courbe est au dessus de la tangente en A, donc au dessus de $\mathcal{T}$ sur $]-\infty\,;\,0]$.
   Avec un raisonnement analogue, f est concave sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sa courbe représentative se situe en dessous de toutes les tangentes : sur $[0\,;\,+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de $\mathcal{T}$.

Exercice 4.

1. On a $\mathrm{H}(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

2. (a) Démontrons que les points H,M et N ne sont pas alignés.

   On a $\overrightarrow{\mathrm{HM}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HN}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$.

   On a $\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$: on en déduit que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HN}}$ ne sont pas proportionnelles : les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HN}}$ ne sont donc pas colinéaires. Par suite, les points H,M et N ne sont pas alignés et définissent donc un plan de l'espace.

   (b) On a $\overrightarrow{\mathrm{HK}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NL}}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$: on remarque que $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=2\overrightarrow{\mathrm{NL}}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{NL}}$ sont colinéaires et par suite que les droites (HK) et (NL) sont parallèles.

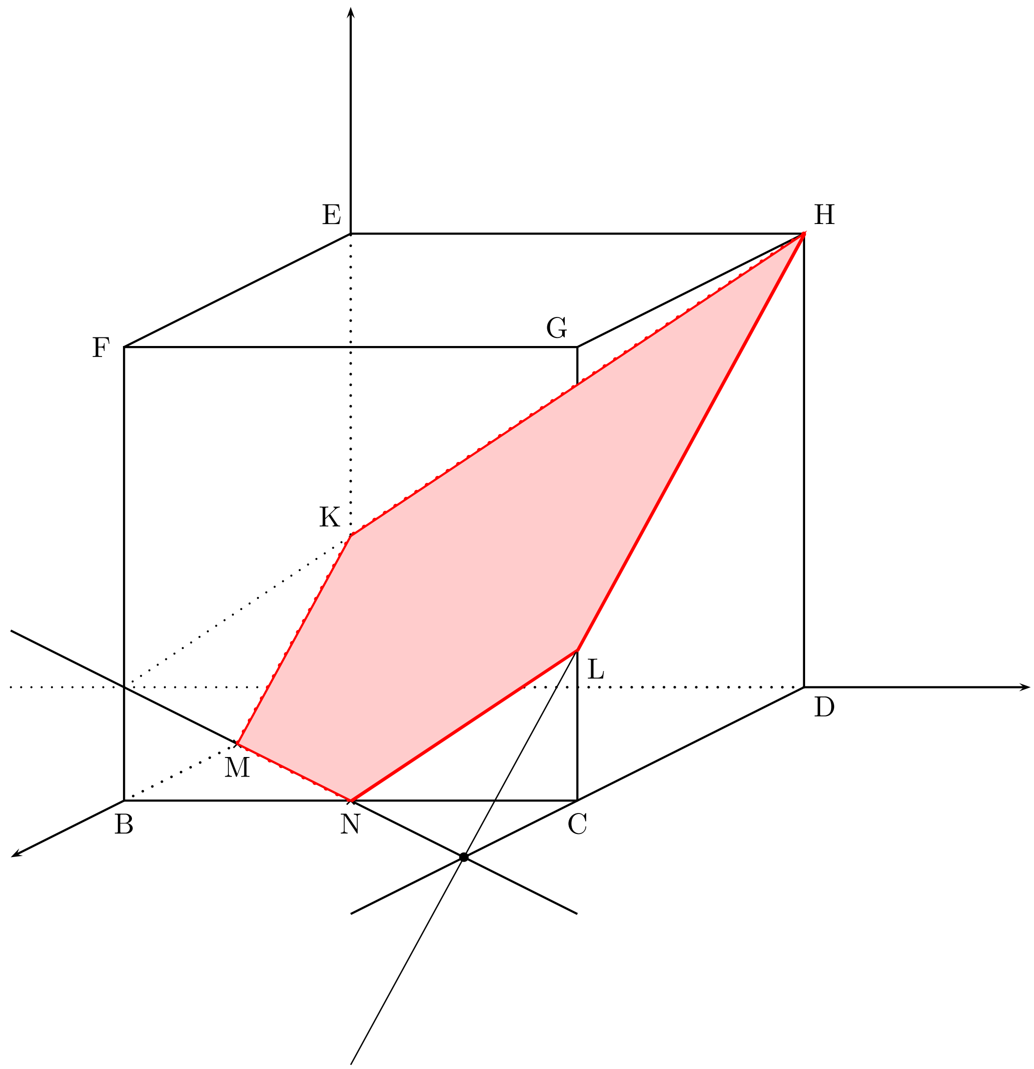
   (c) Pour savoir si les points H, M, N et K sont coplanaires on teste si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HN}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ sont coplanaires.

   Cherchons alors les éventuels réels α et β tels que $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{HM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{HN}}$ où $\overrightarrow{\mathrm{HK}}\begin{pmatrix}0\\-1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HN}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ ce qui se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}0&=&\frac{1}{2}\alpha+\beta\\-1&=&-\alpha-\frac{1}{2}\beta\\-\frac{2}{3}&=&-\alpha-\beta\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\alpha&=&-2\beta\\\alpha&=&\frac{4}{3}\\\beta&=-&\frac{2}{3}\end{array}\right.\quad\text{ce qui est cohérent.}$$

   Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{HM}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{HN}}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HN}}$ sont coplanaires et par suite les points H, K, M et N sont coplanaires.

3. La section du cube par le plan (HMN) est le pentagone HLNMK.


E
H
F
G
K
L
D
M
B
N
C