

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$1. (S_1) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -7x + 5y = -23 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x - 3y = 1 \\ -7x + 5y = -23 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3y + 1 \\ -7(3y + 1) + 5y = -23 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3y + 1 \\ -21y - 7 + 5y = -23 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3y + 1 \\ -16y = -16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 3(1) + 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le couple solution du système (S_1) est $(4; 1)$.

$$2. (S_2) \begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ -6x + 4y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ -12x + 8y = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ 17x = 17 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5(1) + 8y = 21 \\ x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 8y = 16 \\ x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le couple solution du système (S_2) est $(1; 2)$.

Exercice 2

1. Factoriser, si possible dans $\mathbb{R}$, $g(x) = 0,1x^2 - x + 2,5$.

Calculons le discriminant de $g(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 - 4 \times 0,1 \times 2,5 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Delta = 0$, le trinôme admet une unique racine réelle x_0 :

$$\begin{aligned}x_0 &= -\frac{b}{2a} \\ &= \frac{-(-1)}{2 \times 0,1} \\ &= 5\end{aligned}$$

La forme factorisée de $g(x)$ est donc : $g(x) = 0,1(x - 5)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2025x^2 + 2024x - 1 = 0$.

On remarque que $b = a + c$ donc $x_1 = -1$ est racine évidente.

Or $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ donc $-x_2 = -\frac{1}{2025}$ soit $x_2 = \frac{1}{2025}$

L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{ -1; \frac{1}{2025} \right\}$.

Exercice 3

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + x$ et $g(x) = 3x^2 + 10x + 2$. On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ leur courbe représentative respective.

1. Calculer $f(x) - g(x)$.

$$f(x) - g(x) = 4x^3 + x - (3x^2 + 10x + 2) = 4x^3 - 3x^2 - 9x - 2$$

2. On pose $P(x) = 4x^3 - 3x^2 - 9x - 2$.

- (a) Calculer $P(2)$. Qu'en déduire pour $P(x)$?

$P(2) = 0$: **2 est une racine de $P(x)$** , ce qui signifie que $P(x)$ est factorisable par $(x - 2)$.

- (b) Vérifier que pour tout réel x , $P(x) = (x - 2)(4x^2 + 5x + 1)$.

Développons l'expression $(x - 2)(4x^2 + 5x + 1)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x - 2)(4x^2 + 5x + 1) &= 4x^3 + 5x^2 + x - 8x^2 - 10x - 2 \\ &= 4x^3 - 3x^2 - 9x - 2 \\ &= P(x)\end{aligned}$$

L'égalité est bien vérifiée pour tout réel x .

- (c) Démontrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont trois points d'intersection dont vous déterminerez les coordonnées.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, soit $f(x) - g(x) = 0 \iff P(x) = 0$. D'après la question précédente :

$$(x - 2)(4x^2 + 5x + 1) = 0$$

Réolvons $4x^2 + 5x + 1 = 0$: $\Delta = 5^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9 = 3^2$. Le trinôme admet deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}\text{--- } x_1 &= \frac{-5-3}{2 \times 4} = \frac{-8}{8} = -1 \\ \text{--- } x_2 &= \frac{-5+3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

L'équation $P(x) = 0$ possède donc trois solutions : -1 , $-\frac{1}{4}$ et 2 . Il y a par conséquent **trois points d'intersection** :

— Pour $x = -1$: $y = f(-1) = 4(-1)^3 + (-1) = -5 \rightarrow A(-1; -5)$.

— Pour $x = -\frac{1}{4}$: $y = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{64}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{16} \rightarrow B\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{16}\right)$.

— Pour $x = 2$: $y = f(2) = 4(2)^3 + 2 = 34 \rightarrow C(2; 34)$.

- (d) Faire le tableau de signes de $P(x)$ dans $\mathbb{R}$ et en déduire l'intervalle ou les intervalles où $\mathcal{C}_1$ est située au dessus de $\mathcal{C}_2$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
signe de $x - 2$		$-$		$-$		$-$	0		$+$
signe de $4x^2 + 5x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$			$+$
signe $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		$+$

$\mathcal{C}_1$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_2$ lorsque $f(x) - g(x) > 0$, c'est-à-dire sur $\left] -1; -\frac{1}{4} \right[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{-9x^2 + 12x - 4}{x + 1} < 0.$$

Étudions le signe du numérateur et du dénominateur :

— Le numérateur $-9x^2 + 12x - 4 = -(3x - 2)^2$ est toujours négatif ou nul (il s'annule en $x = \frac{2}{3}$).

— Le dénominateur $x + 1$ s'annule en $x = -1$ (valeur interdite).

Dressons le tableau de signes du quotient :

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
signe de $-9x^2 + 12x - 4$	-	0	-	-
signe de $x + 1$	-	+	0	+
signe du quotient	+	-	0	-

Le quotient est strictement négatif lorsque le numérateur et le dénominateur sont de signes contraires (en excluant la valeur interdite -1). L'ensemble des solutions est $S = \left] -1; \frac{2}{3} \right[\cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^4 + 4x^2 - 3 = 0$ en posant $X = x^2$.

En posant $X = x^2$ (avec $X \geq 0$), l'équation devient :

$$-X^2 + 4X - 3 = 0$$

On remarque que la somme des coefficients $a + b + c = 0$.

On en déduit donc que $X_1 = 1$ est racine évidente.

Or $X_1 X_2 = \frac{c}{a}$ donc $X_2 = 3$.

Ces deux valeurs étant positives, on revient à la variable x ($x^2 = X$) :

— $x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

— $x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de l'équation bicarrée est $S = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$.