★★★☆☆ **Exercice 1**

ABC est un triangle équilatéral de côté 12 cm et I est le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout $x \in \mathscr{D} = [0\,;3\sqrt{3}]$, on construit les points M, N, P et Q tels que :

— $M \in [AI]$ — $N \in [IB]$ — $P \in [IC]$ — $Q \in [IC]$
— $IM = IN = IP = CQ = x$.

On s'intéresse à l'aire du quadrilatère $MPNQ$ qu'on nommera $\mathscr{A}(x)$.

1. Montrer que $IC = 6\sqrt{3}$.

   Le triangle ABC est équilatéral de côté 12 cm et I est le milieu de $[AB]$.
   Dans un triangle équilatéral, la médiane issue d'un sommet est également hauteur : le triangle AIC est donc rectangle en I, avec $AC = 12$ et $AI = \dfrac{12}{2} = 6$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AIC rectangle en I :

   $$AC^2 = AI^2 + IC^2$$

   $$12^2 = 6^2 + IC^2 \iff 144 = 36 + IC^2 \iff IC^2 = 108$$

   Comme IC est une longueur ($IC > 0$) :

   $$\begin{aligned} IC &= \sqrt{108} \\ &= \sqrt{36 \times 3} \\ &= \mathbf{6\sqrt{3}}\ \text{cm} \end{aligned}$$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

   $$\mathscr{A}(x) = -2x^2 + 6\sqrt{3}x$$

   Pour tout $x \in [0\,;3\sqrt{3}]$, on a $x \leqslant \dfrac{IC}{2}$, donc les points I, P, Q, C sont alignés dans cet ordre sur $[IC]$.
   — Les diagonales $[MN]$ et $[PQ]$ du quadrilatère $MPNQ$ sont portées respectivement par (AB) et (IC), elles sont donc perpendiculaires.
   — L'aire d'un quadrilatère à diagonales perpendiculaires est égale au demi-produit de ses diagonales :

   $$\mathscr{A}(x) = \frac{MN \times PQ}{2}$$

   — Exprimons chaque diagonale en fonction de x :
   — I est le milieu de $[AB]$ et $IM = IN = x$, donc $MN = IM + IN = 2x$.
   — Les points I, P, Q, C étant alignés dans cet ordre, $IC = IP + PQ + QC$, d'où :

   $$PQ = IC - IP - QC = 6\sqrt{3} - x - x = 6\sqrt{3} - 2x$$

   On en déduit :

   $$\begin{aligned} \mathscr{A}(x) &= \frac{2x(6\sqrt{3} - 2x)}{2} \\ &= x(6\sqrt{3} - 2x) \\ &= \mathbf{-2x^2 + 6\sqrt{3}x} \end{aligned}$$

3. Déterminer les éventuelles valeurs de $x \in \mathscr{D}$ telles que :

(a) L'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 9 cm^2.

$$-2x^2+6\sqrt{3}x=9 \iff -2x^2+6\sqrt{3}x-9=0$$

Calculons le discriminant Δ avec $a=-2$, $b=6\sqrt{3}$ et $c=-9$:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (6\sqrt{3})^2-4\times(-2)\times(-9)\\ &= 108-72\\ &= 36\\ &= 6^2\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes ($\sqrt{\Delta}=6$) :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-6\sqrt{3}-6}{2\times(-2)}\\ &= \frac{3\sqrt{3}+3}{2}\in\mathscr{D}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-6\sqrt{3}+6}{2\times(-2)}\\ &= \frac{3\sqrt{3}-3}{2}\in\mathscr{D}\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathscr{S}=\left\{\frac{3\sqrt{3}-3}{2};\frac{3\sqrt{3}+3}{2}\right\}$.

(b) L'aire $\mathscr{A}(x)$ soit supérieure à 1 cm^2.

$$-2x^2+6\sqrt{3}x>1 \iff -2x^2+6\sqrt{3}x-1>0$$

Calculons le discriminant Δ de ce trinôme ($a=-2$, $b=6\sqrt{3}$, $c=-1$) :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (6\sqrt{3})^2-4\times(-2)\times(-1)\\ &= 108-8\\ &= 100\\ &= 10^2\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6\sqrt{3}-10}{2\times(-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{3}+5}{2} \in \mathscr{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-6\sqrt{3}+10}{2\times(-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{3}-5}{2} \in \mathscr{D} \end{aligned}$$

Sachant que $a = -2 < 0$:

x	0		$\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$		$\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$		$3\sqrt{3}$
signe de $-2x^2+6\sqrt{3}x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que :

$$\mathscr{S} = \left]\frac{\mathbf{3\sqrt{3}-5}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3\sqrt{3}+5}}{\mathbf{2}}\right[$$

(c) L'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC.

L'aire du triangle ABC vaut :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{ABC} &= \frac{AB\times IC}{2} \\ &= \frac{12\times 6\sqrt{3}}{2} \\ &= 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Sa moitié est donc égale à $18\sqrt{3}$ cm^2 et on résout donc l'équation $\mathscr{A}(x) = 18\sqrt{3}$:

$$-2x^2+6\sqrt{3}x-18\sqrt{3} = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \Delta &= (6\sqrt{3})^2 - 4\times(-2)\times(-18\sqrt{3}) \\ &= 108 - 144\sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet **aucune solution** dans $\mathscr{D}$ ($\mathscr{S} = \emptyset$).

4. Déterminer si $\mathscr{A}(x)$ admet un extremum sur $\mathscr{D}$ et si oui préciser sa nature, en quelle valeur il est atteint et sa valeur.
   Les valeurs exactes sont attendues.

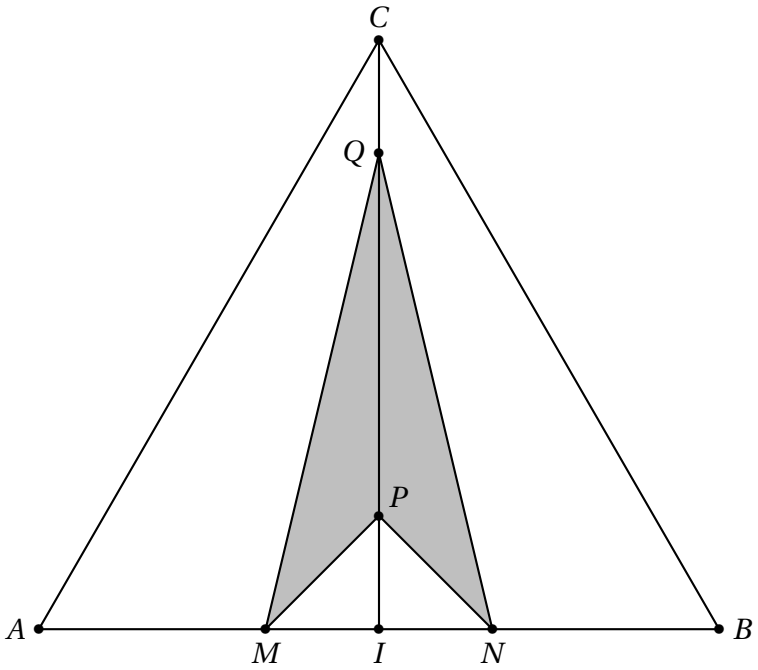
   $\mathscr{A}$ est une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $a=-2<0$, $b=6\sqrt{3}$ et $c=0$. La parabole est tournée vers le bas, donc $\mathscr{A}$ admet un **maximum**.

   — Il est atteint en :

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{b}{2a}\\ &= -\frac{6\sqrt{3}}{2\times(-2)}\\ &= \frac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} \in \mathscr{D}\end{aligned}$$

   — La valeur de ce maximum est :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) &= -2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+6\sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -2\times\frac{27}{4}+\frac{54}{2}\\ &= -\frac{27}{2}+27\\ &= \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{2}} = \mathbf{13{,}5}\ \mathrm{cm}^{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

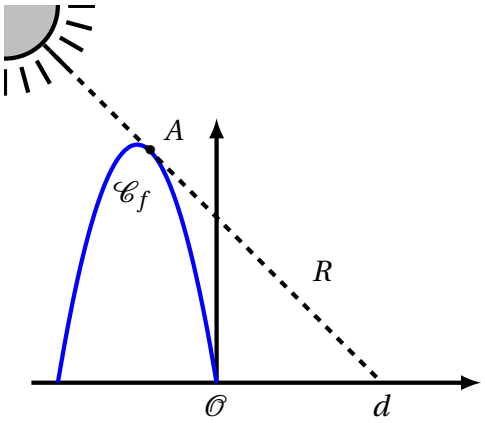


★★★☆☆ **Exercice 2**

Pour réaliser une installation, une artiste a besoin de savoir où sera projetée l'ombre d'une sculpture.

Elle souhaite savoir à quelle distance d sera projetée l'ombre de la sculpture à midi, début septembre, quand les rayons solaires auront une inclinaison de 45° (c'est-à-dire un coefficient directeur de -1).
Le problème est modélisé en deux dimensions sur le schéma ci-contre, où un repère orthonormé a été choisi avec pour origine la base de la sculpture. L'unité est de mètre. La sculpture peut-être représenté par la courbe de la fonction :

$$f : x \mapsto -2x^2 - 6x.$$



On appelle R la droite modélisant le rayon du soleil définissant la limite de l'ombre, et A le point d'intersection entre cette droite et la courbe. On remarque que R est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

1. Soit a un réel quelconque.
   Calculer, à l'aide du taux d'accroissement, $f'(a)$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Calculons le taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre a et $a+h$:

   $$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \frac{-2(a+h)^2-6(a+h)-(-2a^2-6a)}{h} \\ &= \frac{-2(a^2+2ah+h^2)-6a-6h+2a^2+6a}{h} \\ &= \frac{-2a^2-4ah-2h^2-6h+2a^2}{h} \\ &= \frac{h(-4a-2h-6)}{h} = -4a-2h-6\end{aligned}$$

   Lorsque h tend vers 0 :

   $$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\tau(h) &= \lim_{h\to 0}(-4a-2h-6) \\ &= -4a-6\end{aligned}$$

   La limite est finie, donc f est dérivable en a et $f'(a) = -4a-6$.

2. Montrer l'unique solution de $f'(a) = -1$ est $a = -\frac{5}{4}$.

   $$f'(a) = -1 \iff -4a-6 = -1 \iff -4a = 5 \iff a = -\frac{5}{4}$$

   L'unique solution est bien $a = -\frac{5}{4}$.

3. Montrer que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $-\frac{5}{4}$ est $y = -x + \frac{25}{8}$.

   L'équation réduite de la tangente en $a = -\frac{5}{4}$ est $y = f'\left(-\frac{5}{4}\right)\left(x - \left(-\frac{5}{4}\right)\right) + f\left(-\frac{5}{4}\right)$.

   — D'après la question précédente, $f'\left(-\frac{5}{4}\right) = -1$.

   — Calculons $f\left(-\frac{5}{4}\right)$:

   $$f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{35}{8}$$

   On remplace dans l'équation de la tangente :

   $$\begin{aligned} y &= -1\left(x + \frac{5}{4}\right) + \frac{35}{8} \\ &= -x - \frac{10}{8} + \frac{35}{8} \\ &= -x + \frac{25}{8} \end{aligned}$$

4. Déterminer le point d'intersection de R et de l'axe des abscisses, et en déduire à quelle distance de la base de la sculpture arrivera l'ombre ce jour-là.

   L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$. On résout :

   $$-x + \frac{25}{8} = 0 \iff x = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

   Le point d'intersection de R et de l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(\frac{25}{8}; 0\right)$.
   L'origine $\mathcal{O}$ correspondant à la base de la sculpture et l'unité étant le mètre, l'ombre arrivera à une distance $d = \frac{25}{8}$ **m** $= 3{,}125$ **m** de la base de la sculpture.

★★★☆☆ **Exercice 3**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$ en posant au préalable $X = x^2$.

   On pose $X = x^2$.
   L'équation devient :

   $$2X^2 - 5X - 3 = 0$$

   On a $a = 2$, $b = -5$ et $c = -3$ et :

   $$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) \\ &= 25 + 24 \\ &= 49 = 7^2 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

Revenons à la variable x ($x^2 = X$) :
— $x^2 = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ (un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$).
— $x^2 = 3 \iff x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$.
Conclusion : $\mathscr{S} = \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x + 7\sqrt{x} - 5 = 0$ en posant au préalable $X = \sqrt{x}$.

Domaine d'étude : $\sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \in [0\,;+\infty[$.
On pose $X = \sqrt{x}$ avec $X \geqslant 0$ (on a alors $x = X^2$).
L'équation devient :

$$-2X^2 + 7X - 5 = 0$$

Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = 49 - 40 = 9 > 0$$

Les deux racines en X sont ($\sqrt{\Delta} = 3$) :

$$X_1 = \frac{-7-3}{-4} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-7+3}{-4} = 1$$

Ces deux valeurs sont positives, donc acceptables. Revenons à la variable x ($\sqrt{x} = X \iff x = X^2$) :
— $\sqrt{x} = \frac{5}{2} \iff x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
— $\sqrt{x} = 1 \iff x = 1^2 = 1$
Conclusion : $\mathscr{S} = \left\{1\,;\,\frac{25}{4}\right\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x^2 + x + 1}{2 - x} \leqslant 0$

— **Valeur interdite :** $2 - x = 0 \iff x = 2$. L'étude se fait sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
— **Signe du numérateur** $3x^2 + x + 1$ **:**

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 1 = 1 - 12 = -11 < 0$$

Le discriminant est strictement négatif et $a = 3 > 0$, donc $3x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x.
— **Signe du dénominateur** $2 - x$ **:** racine $x = 2$ et $m = -1 < 0$:
Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $3x^2 + x + 1$		$+$		$+$	
signe de $2 - x$		$+$	0	$-$	
signe du quotient		$+$	‖	$-$	

On cherche les valeurs de x pour lesquelles le quotient est négatif ou nul :

$$\mathscr{S} =]\mathbf{2}; +\infty[$$

★★★☆☆ **Exercice 4**

Calculer la valeur de l'expression infinie $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$.
Aide : calculer x^2

On a $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$. Par construction, x est une racine carrée, donc $x > 0$ (plus précisément $x > \sqrt{1} = 1$).
En élevant l'égalité au carré :

$$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}$$

On reconnaît l'expression de x sous le radical de droite, ce qui donne l'équation :

$$x^2 = 1 + x \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Résolvons cette équation du second degré :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) \\ &= 1 + 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Or $\sqrt{5} > 2$, donc $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Comme on sait que $x > 0$, cette solution est exclue.
La valeur exacte de l'expression infinie est donc le nombre d'or :

$$\mathbf{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$