Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\dfrac{5}{4}\right)$. On note $(\mathscr{T})$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Partie A. Lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. *Aucune justification n'est demandée.*

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathscr{T})$.

   Par lecture graphique, la tangente $(\mathscr{T})$ passe par A$\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et B$\left(1\,;\dfrac{5}{4}\right)$.
   Son coefficient directeur vaut :

   $$m = \frac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{1-0} = \frac{3}{4},$$

   et son ordonnée à l'origine vaut $\dfrac{1}{2}$. L'équation réduite de $(\mathscr{T})$ est donc : $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe, semble concave.

   Graphiquement, la fonction f semble convexe sur $]-\infty\,;0]$ et concave sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B. Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.

   Posons $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-3x}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive, et $u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$. Comme $f = \dfrac{1}{u}$, on obtient :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2} \end{aligned}$$

2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-3x} > 0$ et $(1+e^{-3x})^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}99$ admet une unique solution α dans $[0;2]$ puis déterminer une valeur approchée de α au centième.

   On dresse le tableau de variation de f sur $[0;2]$:

x	0		α		2
Variation de f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$0{,}99$	$\nearrow$	$\frac{1}{1+e^{-6}}$

   - f est continue sur $[0;2]$ car dérivable.
   - f est strictement croissante sur $[0;2]$.

   $0{,}99 \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{1+e^{-6}}\right] = f([0;2])$.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}99$ admet une unique solution α dans $[0;2]$.
   À la calculatrice, $f(1{,}53) \approx 0{,}9899$ et $f(1{,}54) \approx 0{,}9902$, donc $\alpha \approx 1{,}53$ à 10^{-2} près.

Partie C. Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   Une équation de $(\mathscr{T})$ est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{3e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{3}{4}$. On retrouve bien $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = \dfrac{9e^{-3x}\left(e^{-3x}-1\right)}{\left(1+e^{-3x}\right)^3}$. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $9e^{-3x} > 0$ et $(1+e^{-3x})^3 > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $e^{-3x} - 1$. Or :

   $$e^{-3x} - 1 \geqslant 0 \iff e^{-3x} \geqslant e^0 \iff -3x \geqslant 0 \iff x \leqslant 0.$$

   Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty;0]$ et $f''(x) \leqslant 0$ sur $[0;+\infty[$ (avec $f''(0) = 0$).

3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.

   Puisque $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty;0]$, la fonction f est convexe sur $]-\infty;0]$ (et concave sur $[0;+\infty[$).

   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

   La dérivée seconde f'' s'annule en $x = 0$ en changeant de signe : le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est donc un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

(c) En déduire la position relative de la tangente $(\mathscr{T})$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$. Justifier la réponse.

Sur $]-\infty;0]$, f est convexe donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente $(\mathscr{T})$.
Sur $[0;+\infty[$, f est concave donc $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de $(\mathscr{T})$. Les deux courbes se croisent au point A.

Exercice 2

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x} - x^2$, définie sur $]-\infty;-1]$.

   La fonction f est dérivable sur $]-\infty;-1]$.
   Soit $x \in]-\infty;-1]$:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^2} - 2x \\ &= \frac{-2-2x^3}{x^2} \\ &= -\frac{2(x^3+1)}{x^2} \end{aligned}$$

   Pour tout $x \in]-\infty;-1]$, on a $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe opposé à x^3+1. Or $x^3+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$.
   On en déduit que sur $]-\infty;-1]$, $f'(x) \geqslant 0$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

2. On admet que la suite (u_n) existe bien pour tout entier naturel n.
   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -1$.

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n$: « u_n existe et $u_n \leqslant -1$ ».
   - **Initialisation.** Si $n = 0$, $u_0 = -1$ donc $u_0 \leqslant -1$, d'où $\mathscr{P}_0$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ (i.e. $u_n \leqslant -1$) et démontrons $\mathscr{P}_{n+1}$.
     Par hypothèse de récurrence : $u_n \leqslant -1$.
     Or f est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, donc f conserve l'ordre sur cet intervalle.
     Ainsi : $f(u_n) \leqslant f(-1)$.
     Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(-1) = -3$, donc $u_{n+1} \leqslant -3 \leqslant -1$, d'où $\mathscr{P}_{n+1}$.
   - **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -1$.

3. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $x^3 + x^2 - 2$.

   On remarque que 1 est une racine évidente ($1^3 + 1^2 - 2 = 0$). On factorise par $(x-1)$ par la méthode de Ruffini, par exemple :

   $$x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2+2x+2).$$

   Le discriminant du trinôme x^2+2x+2 vaut $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 2 = -4 < 0$, donc $x^2+2x+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le signe de x^3+x^2-2 est donc celui de $x-1$: négatif ou nul sur $]-\infty;1]$ et positif ou nul sur $[1;+\infty[$.

4. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \leqslant -1 < 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{u_n} - u_n^2 - u_n \\ &= \frac{2 - u_n^3 - u_n^2}{u_n} \\ &= -\frac{u_n^3 + u_n^2 - 2}{u_n} \end{aligned}$$

   Puisque $u_n \leqslant -1 < 1$, on a $u_n^3 + u_n^2 - 2 \leqslant 0$ d'après la question 3. Comme $u_n < 0$, le quotient $\dfrac{u_n^3 + u_n^2 - 2}{u_n}$ est positif ou nul, d'où $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

5. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

   Supposons par l'absurde que la suite (u_n) est minorée. Étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ vérifiant $\ell \leqslant u_0 = -1$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2$ (avec $\ell \neq 0$), on obtient :

$$\ell = \frac{2}{\ell} - \ell^2 \iff \ell^3 + \ell^2 - 2 = 0.$$

   D'après la question 3, cette équation admet pour unique solution réelle $\ell = 1$, ce qui contredit $\ell \leqslant -1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas minorée.

Exercice 3

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

Partie A. Étude des premiers cas et existence d'une solution

1. Déterminer l'expression de $f_1(x)$ et résoudre l'équation $f_1(x) = 0$ sur $[0\,;1]$.

   Pour $n = 1$, $f_1(x) = x + x - 1 = 2x - 1$. L'équation $2x - 1 = 0$ donne $x = \dfrac{1}{2}$, qui appartient bien à $[0\,;1]$. Ainsi $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$.

2. Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur $[0\,;1]$.

   Pour $n = 2$, $f_2(x) = x^2 + x - 1$. Le discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, d'où les deux racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $x_1 < 0$ et $x_2 \in [0\,;1]$, l'unique solution sur $[0\,;1]$ est $\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Étudier le sens de variation de la fonction f_n sur $[0\,;1]$.

   La fonction f_n est dérivable sur $[0\,;1]$.
   Soit $x \in [0\,;1]$.
   $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $nx^{n-1} \geqslant 0$, donc $f_n'(x) \geqslant 1 > 0$. La fonction f_n est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

x	0	α_n	1
Variation de f_n	-1	$\nearrow$ 0	$\nearrow$ 1

(b) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;1]$, que l'on notera α_n.

- f_n est continue sur $[0\,;1]$ car dérivable.
- f_n est strictement croissante sur cet intervalle.

$0 \in [-1\,;1] = f_n\big([0\,;1]\big)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;1]$.

(c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in]0\,;1[$.

Comme $f_n(0) = -1 \neq 0$ et $f_n(1) = 1 \neq 0$, on a $\alpha_n \neq 0$ et $\alpha_n \neq 1$, d'où $\alpha_n \in]0\,;1[$.

Partie B. Étude de la suite (α_n)

1. (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) = -(1-\alpha_n)^2$.

Par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$, soit $\alpha_n^n + \alpha_n - 1 = 0$, d'où $\alpha_n^n = 1 - \alpha_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_n) &= \alpha_n^{n+1} + \alpha_n - 1 \\ &= \alpha_n \cdot \alpha_n^n - (1-\alpha_n) \\ &= \alpha_n(1-\alpha_n) - (1-\alpha_n) \\ &= -(1-\alpha_n)^2 \end{aligned}$$

(b) En déduire le sens de variation de la suite (α_n).

Comme $\alpha_n \in]0\,;1[$, on a $1-\alpha_n > 0$, donc $f_{n+1}(\alpha_n) = -(1-\alpha_n)^2 < 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante sur $[0\,;1]$, on en déduit $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

2. Démontrer que la suite (α_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

La suite (α_n) est croissante et majorée par 1 (car $\alpha_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite finie $\ell \leqslant 1$.

3. On suppose dans cette question que $\ell < 1$.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n^n \leqslant \ell^n$.

La suite (α_n) étant croissante de limite ℓ, on a $0 < \alpha_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^n$ étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, il vient $0 < \alpha_n^n \leqslant \ell^n$.

(b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n$, puis aboutir à une contradiction.

Puisque $0 < \ell < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème d'encadrement des limites, $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n^n = 1 - \alpha_n$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $0 = 1 - \ell$, soit $\ell = 1$, ce qui contredit l'hypothèse $\ell < 1$.

(c) Conclure sur la valeur de ℓ.

Comme $\ell \leqslant 1$ et que $\ell < 1$ est impossible, on conclut que $\ell = 1$.