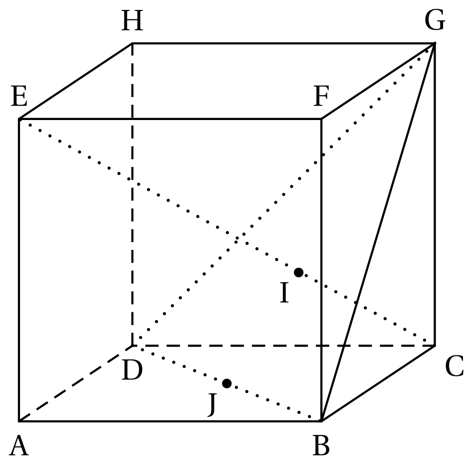
Correction exercice 1



On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. On a : $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. La droite (EC) passe par le point $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   La droite (EC) a pour représentation paramétrique;
   $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_E + 1\times t\\ y & = & y_E+1\times t\\ z & = & z_E+(-1)\times t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t\\ y & = & t\\ z & = & 1-t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$

3. Les points G, B et D ne sont pas alignés donc (GDB) est un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{BD}$.
   $\overrightarrow{GB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{GB} = 1\times 0+1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0-1+1=0$ donc $\overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{GB}$
   $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BD} = 1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times 0=-1+1+0=0$ donc $\overrightarrow{EC}\perp\overrightarrow{BD}$
   Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (GDB) donc la droite (EC) est orthogonale au plan (GDB).

4. (a) La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc tout vecteur directeur de la droite (EC) est un vecteur normal au plan (GDB), en particulier le vecteur $\overrightarrow{EC}$ de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,-1)$.
   Donc le plan (GDB) a une équation de la forme $x+y-z+d=0$ où d est un réel à déterminer.
   Le point B appartient au plan (GDB) donc $x_B+y_B-z_B+d=0$; autrement dit : $1+0-0+d=0$ donc $d=-1$.
   Le plan (GDB) a donc pour équation : $x+y-z-1=0$.

   (b) On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
   Donc les coordonnées de I sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t\\ y & = & t\\ z & = & 1-t\\ x+y-z-1 & = & 0\end{array}\right.$
   On a donc : $t+t-(1-t)-1=0$ donc $t=\dfrac{2}{3}$.
   On en déduit les coordonnées de I : $x_I=t=\dfrac{2}{3}$, $y_I=t=\dfrac{2}{3}$ et $z_I=1-t=\dfrac{1}{3}$, soit $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

(c) La droite (EC) est orthogonale au plan (GDB) donc la distance du point E au plan (GDB) est la longueur EI.

$EI^2 = \overrightarrow{EI}.\overrightarrow{EI}$ donc $EI^2 = \left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2 = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = \frac{12}{9}$;

Ainsi $EI = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

La distance du point I au plan (GDB) est donc $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. (a) Les côtés [BD], [DG] et [GB] du triangle BDG sont les diagonales respectives des carrés ABCD, CDHG et BCGF qui sont superposables ; donc leurs diagonales ont la même longueur. Ce qui veut dire que le triangle BDG est équilatéral.

(b) On appelle J le milieu du segment [BD] ; donc le segment [GJ] est la médiane issue de G dans le triangle BDG. Or ce triangle est équilatéral donc [GJ] est la hauteur issue de G dans ce triangle. L'aire du triangle BDG est donc : $\mathscr{A} = \frac{BD \times GJ}{2}$.

$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $J\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

$GJ^2 = \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + (0-1)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1 = \frac{6}{4}$ donc $GJ = \frac{\sqrt{6}}{2}$

[BD] est la diagonale du carré ABCD de côté 1 donc $BD = \sqrt{2}$.

L'aire de BDG est donc : $\mathscr{A} = \frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Le volume du tétraèdre EGBD est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\mathscr{A} \times EI \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \quad \text{u.v} \end{aligned}$$