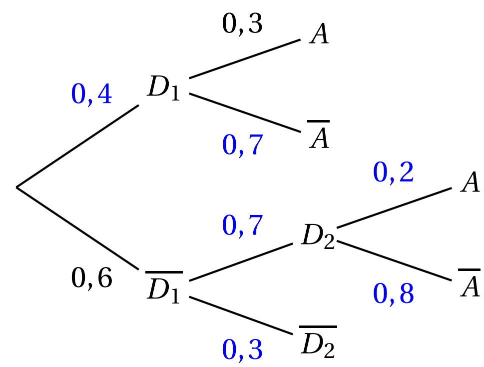
Correction exercice 10

Partie A

1. On complète l'arbre pondéré.



2. D_1 et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(D_1 \cap A) + \mathbf{P}\left(\overline{D_1} \cap D_2 \cap A\right) \\ &= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \times 0,2 \\ &= 0,204\end{aligned}$$

3. On sait que la personne a acheté le produit.
   La probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_A(D_1) &= \frac{\mathbf{P}(D_1 \cap A)}{\mathbf{P}(A)} \\ &= \frac{0,4 \times 0,3}{0,204} \\ &\approx 0,588\end{aligned}$$

Conclusion : sachant que la personne a acheté le produit, la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel est environ égale à $0,588$.

Partie B

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.
   (a) On admet que X suit une loi binomiale : ses paramètres sont $n = 30$ et $p = 0,204$.
   (b) La probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit est :
   $\mathbf{P}(X = 6) = \binom{30}{6} \times 0,204^6 \times (1 - 0,204)^{24}$ soit $\mathbf{P}(X = 6) \approx 0,179$
   (c) X suivant une loi binomiale, son espérance est donc égale à np.
   L'espérance de la variable aléatoire X est $\mathbf{E}(X) = np = 30 \times 0,204 = 6,12$.
   Si on répète cette expérience un très grand nombre de fois, en moyenne sur un échantillon de 30 personnes, il y en a en $6,12$ qui achètent le produit.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   Dans cette configuration, X suit la loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0,204$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbf{P}(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,204^0 \times (1 - 0,204)^n \\ &= 1 - 0,796^n\end{aligned}$$

   $\mathbf{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,99) \Longleftrightarrow 1 - 0,796^n \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow 0,01 \geqslant 0,796^n$.
   La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc elle conserve l'ordre dans $]0\,;\,+\infty[$:
   $\ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,796^n\right) \Longleftrightarrow \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,796) \Longleftrightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \leqslant n$ car $\ln(0,796) < 0$.
   Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,796)} \approx 20,2$ donc la valeur de n cherchée est 21.