

Correction Exercice 2

TMaths groupe 2

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

1. u est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$u'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$$

La fonction u est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$.

Les solutions de (E₀) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} telles que : $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- 3.

$$\begin{aligned} v \text{ est solution de (E)} &\iff v' - 2v = e^{2x} \\ &\iff v' - 2v = u' - 2u \quad \text{vu que } u' - 2u = e^{2x} \\ &\iff v' - u' - 2v + 2u = 0 \\ &\iff (v - u)' - 2(v - u) = 0 \\ &\iff v - u \text{ solution de (E}_0\text{)} \end{aligned}$$

Conclusion : v est solution de (E) $\iff v - u$ solution de (E₀).

4. v solution équivaut à $v - u$ solution de (E₀).

On a donc $v(x) - u(x) = Ce^{2x}$ soit $v(x) = u(x) + Ce^{2x}$ soit encore :

$$v(x) = (x + C)e^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

5. On a $v(0) = 1 \iff (0 + C)e^0 = C = 1$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$v(x) = (x + 1)e^{2x}$$

Partie B - Étude d'une fonction

1. — En $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^T = +\infty$: par composition des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$. On en déduit par produit des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

— En $-\infty$ on a une forme indéterminée du type $\ll \infty \times 0$, on change donc d'écriture.

$$f(x) = xe^x \times e^x + e^{2x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limite de cours) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \times e^x = 0$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$: par composition des limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$.

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

2. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} donc sur cet intervalle et pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} \\ &= e^{2x}(1 + 2x + 2) \\ &= (2x + 3)e^{2x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que l'expression affine $2x + 3$ qui admet $-\frac{3}{2}$ comme racine.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
Variation de f	0	$-\frac{1}{2}e^{-3}$	$+\infty$

On a $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-3}$.

Le signe de $f(x)$ est celui de $x + 1$, donc f est positive sur $] -1; +\infty[$ et négative sur $] -\infty; -1[$.

3. (a) D'après la question précédente, f est négative sur l'intervalle $] -\infty; -1[$. Donc l'aire de la surface \mathcal{D} est égale (en unités d'aire) à :

$$-\int_{\alpha}^{-1} f(x) dx.$$

En posant $u(x) = x + 1$ et $v'(x) = e^{2x}$, on obtient :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{par exemple}$$

Avec u, v, u' et v' dérivables sur \mathbb{R} à dérivées continues, on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{-1} f(x) dx &= \left[(x+1) \times \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\alpha}^{-1} - \int_{\alpha}^{-1} e^{2x} dx \\ &= \left[(x+1) \times \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\alpha}^{-1} \\ &= \left[\frac{x}{2} e^{2x} \right]_{\alpha}^{-1} \\ &= \frac{-1}{2} e^{-2} - \frac{\alpha}{2} e^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} e^{2\alpha} + \frac{1}{2} e^{-2}$.

(b) On a la même forme indéterminée que précédemment.

En écrivant de nouveau que $\alpha e^{2\alpha} = \alpha e^{\alpha} \times e^{\alpha}$.

On a de la même façon $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\alpha}{2} e^{2\alpha} = 0$, donc :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \mathcal{D}(\alpha) = \frac{e^{-2}}{2} \text{ (u.a.)}$$