Correction exercice 2

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

1. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{2x} + 2xe^{2x} \\ u'(x) - 2u(x) &= e^{2x} \end{aligned}$$

   La fonction u est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$.
   Le solutions de (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $x \longmapsto Ce^{2x},\ C \in \mathbb{R}$.

3. — Supposons v solution de (E) : on a alors $v' - 2v = e^{2x}$. Or u est une solution particulière de (E), on a alors $u' - 2u = e^{2x}$ et par suite $v' - 2v = u' - 2u$
   que l'on peut aussi écrire $(v - u)' - 2(v - u) = 0$ et par suite $v - u$ est solution de l'équation homogène (E_0).
   — Réciproquement supposons $v - u$ est solution de (E_0), alors
   $v' - u' - 2(v - u) = 0$, soit $v' - 2v = u' - 2u = e^{2x}$ (vu que u est une solution de (E)) ce qui signifie que v est solution de (E).

   Conclusion : v est solution de (E) $\iff$ $v - u$ solution de (E_0).

4. v solution équivaut à $v - u$ solution de (E_0).

   On a donc $v - u$ est solution de (E_0) signifie que $v(x) - u(x) = Ce^{2x}$ soit $v(x) = u(x) + Ce^{2x}$ soit encore :

$$v(x) = (x + C)e^{2x},\ C \in \mathbb{R}$$

5. On a $v(0) = 1 \iff \left(KC + 0)e^{2\times 0}\right) = C = 1$.
   Conclusion : pour tout réel x, $v(x) = (x + 1)e^{2x}$.

Partie B - Étude d'une fonction

1. • $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{T\to+\infty} e^T = +\infty$: par composition des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.
   On en déduit par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   • En $-\infty$ on a une forme indéterminée, on change donc d'écriture.
   $f(x) = xe^x \times e^x + e^{2x}$.
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (limite de cours) et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x \times e^x = 0$.
   Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$: par composition des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.
   On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur cet intervalle et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} + 2(x + 1)e^{2x} && (1) \\ &= e^{2x}(1 + 2x + 2) && (2) \\ &= (2x + 3)e^{2x} && (3) \end{aligned}$$

   $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^{2x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que de $2x + 3$ qui admet $-\frac{3}{2}$ comme racine.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
variation de f	0 ↘	$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}$	↗ $+\infty$

On a $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}$.

Le signe de $f(x)$ est celui de $x+1$, donc f est positive sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et négative sur $]-\infty\ ;\ -1[$.

3. (a) D'après le tableau de variations précédent la fonction f est négative sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$. Donc l'aire de la surface $\mathscr{D}$ est égale (en unités d'aire) à l'opposée de l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En posant $u(x) = x+1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$, on obtient :

$u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ par exemple.

avec u, v, u' et v' dérivables sur $\mathbb{R}$ à dérivées continues, on intègre par parties :

$$\int_{\alpha}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(x+1)\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{\alpha}^{-1} - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{-1}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad (4)$$

$$= \left[(x+1)\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_{\alpha}^{-1} \qquad (5)$$

$$= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\times(-1)} - \frac{1}{2}(\alpha+1)\,\mathrm{e}^{2\alpha} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha} \qquad (6)$$

Donc $\mathscr{D}(\alpha) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{1}{2}(\alpha+1)\,\mathrm{e}^{2\alpha} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha}$.

(b) On remarque que $\mathscr{D}(\alpha) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + \dfrac{1}{2}f(\alpha) - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2\alpha}$.

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\mathscr{D}(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}\ \text{(u. a.)}$$