Correction Exercice 3

TMaths groupe 2

Partie I.

1. L'élève a étudié 50 leçons sur 100. Il tire 2 papiers (sans remise) parmi 100, chaque papier correspondant à une leçon distincte.

   On distingue :
   - 50 leçons étudiées dont il connaît les sujets ;
   - 50 leçons non étudiées dont il ne connaît pas les sujets.

   Nombre total de tirages possibles de 2 papiers parmi 100 :

$$\binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2} = 4950$$

2. Calculons la probabilité qu'il ne connaisse aucun des sujets. Dans ce cas, les deux papiers tirés portent sur des leçons non étudiées. Il y a $\binom{50}{2}$ façons de tirer 2 papiers parmi les 50 qu'il ne connaît pas.

$$\mathbf{P}_{aucun} = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{1225}{4950} = \frac{49}{198}$$

3. Calculons la probabilité qu'il connaisse les deux sujets. Même raisonnement, mais parmi les 50 qu'il connaît : c'est le même résultat que pour la question précédente, car les ensembles sont symétriques.

$$\mathbf{P}_{deux} = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{49}{198}$$

4. Calculons la probabilité qu'il connaisse un seul des deux sujets. Cela revient à : 1 leçon parmi les 50 étudiées soit $\binom{50}{1} = 50$ issues favorables et 1 parmi les 50 non étudiées soit encore $\binom{50}{1} = 50$.

   D'après le principe multiplicatif $50 \times 50 = 2500$ façons de tirer un seul des deux sujets.

$$\mathbf{P}_{un\ seul} = \frac{2500}{4950} = \frac{50}{99}$$

5. Calculons la probabilité qu'il connaisse au moins un des sujets, c'est le complément de la probabilité qu'il ne connaisse aucun sujet.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{au\ moins\ un} &= 1 - \mathbf{P}_{aucun} && (1)\\
&= 1 - \frac{49}{198} && (2)\\
&= \frac{149}{198} && (3)
\end{aligned}$$

Partie II.

L'élève a étudié n leçons sur 100.

1. Calculons la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un des deux sujets. Utilisons le même raisonnement. Le nombre de leçons non étudiées est $100-n$ et il y a $\binom{100-n}{2}$ façons de tirer 2 papiers qu'il ne connaît pas. Donc :

$$\begin{aligned} p_n &= 1-\frac{\binom{100-n}{2}}{\binom{100}{2}} \\ &= 1-\frac{(100-n)(99-n)}{9900} \end{aligned}$$

2. Déterminons les entiers n tels que $p_n \geq 0,95$. On veut :

$$\begin{aligned} 1-\frac{(100-n)(99-n)}{9900} \geq 0,95 &\iff \frac{(100-n)(99-n)}{9900} \leq 0,05 \\ &\iff (100-n)(99-n) \leq 495 \\ &\iff n^2-199n+9405 \leq 0 \end{aligned}$$

Les racines de ce trinôme sont :

$$x_1 = \frac{199-\sqrt{1981}}{2} \approx 77,24 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{199+\sqrt{1981}}{2} \approx 121,75$$

D'où le tableau de signes de ce trinôme dans $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $x^2-199x+9405$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $n \geq 78$ avec la condition $n \leq 100$.