Correction exercice 3

Partie 1.

1. L'élève a étudié 50 leçons sur 100, Il tire 2 papiers (sans remise) parmi 100, chaque papier correspondant à une leçon distincte.

   On distingue :

   — 50 leçons étudiées dont il connaît les sujets;

   — 50 leçons non étudiées dont il ne connaît pas les sujets.

   Nombre total de tirages possibles de 2 papiers parmi 100 :

$$\binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2} = 4950$$

2. Calculons la probabilité qu'il ne connaisse aucun des sujets. Dans ce cas, les deux papiers tirés portent sur des leçons non étudiées.

   Il y a $\binom{50}{2}$ façons de tirer 2 papiers parmi les 50 qu'il ne connaît pas.

$$P_{\text{aucun}} = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{49}{198}$$

3. Calculons la probabilité qu'il connaisse les deux sujets

   Même raisonnement, mais parmi les 50 qu'il connaît : c'est le même résultat que pour la question précédente, car les ensembles sont symétriques.

$$P_{\text{deux}} = \frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{49}{198}$$

4. Calculons la probabilité qu'il connaisse un seul des deux sujets. Cela revient à : 1 leçon parmi les 50 étudiées soit $\binom{50}{1} = 50$ issues favorables et 1 parmi les 50 non étudiées soit encore $\binom{50}{1} = 50$ issues favorables.

   D'après le principe multiplicatif $50 \times 50 = 2500$ façons de tirer un seul des deux sujets.

$$P_{\text{un seul}} = \frac{2500}{4950} = \frac{50}{99}$$

5. Calculons la probabilité qu'il connaisse au moins un des sujets, c'est le complément de la probabilité qu'il ne connaisse aucun sujet.

$$P_{\text{au moins un}} = 1 - P_{\text{aucun}} = 1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198}$$

Partie 2.

L'élève a étudié n leçons sur 100.

1. Calculons la probabilité p_n qu?il connaisse au moins un des deux sujets. Utilisons le même raisonnement.
   Le nombre de leçons non étudiées est $100-n$ et il y a $\binom{100-n}{2}$ façons de tirer 2 papiers qu'il ne connaît pas
   Donc :
   $$p_n = 1 - \frac{\binom{100-n}{2}}{\binom{100}{2}} = 1 - \frac{(100-n)(99-n)}{9900}$$
2. Déterminons les entiers n tels que $p_n \geq 0{,}95$
   On veut :
   $$1 - \frac{(100-n)(99-n)}{9900} \geq 0,95$$
   $$\iff \frac{(100-n)(99-n)}{9900} \leq 0,05$$
   $$\iff (100-n)(99-n) \leq 495$$
   $$\iff n^2 - 199n + 9405 \leq 0$$
   Les racines de ce trinôme sont $x_1 = \dfrac{199-\sqrt{1981}}{2} \approx 77,24$ et $x_2 = \dfrac{199+\sqrt{1981}}{2} \approx 121,75$ d'où le tableau de signes de ce trinôme dans $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $x^2 - 199x + 9405$		+	0	-	0	+	

On en déduit que $n \geqslant 78$ avec la condition $n \leqslant 100$.