

Correction Exercice 4

TMaths groupe 2

Partie A.

1. — Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty \quad \text{donc par produit des limites :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

— Limite en 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) - 2 = -\infty \quad \text{donc par produit des limites :} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

2. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.
 $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \end{aligned}$$

3. (a) u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, $u'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$.

On en déduit que la fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(b) u est continue sur $]0; +\infty[$ car dérivable, donc aussi sur $[2; 3]$.

u est strictement croissante sur $[2; 3]$.

De plus, $0 \in [\ln(2) + 2 - 3; \ln(3) + 3 - 3]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 3]$.

On a $u(2, 20) < 0$ et $u(2, 21) > 0$, donc $2, 20 < \alpha < 2, 21$.

(c) Tableau de signe de $u(x)$:

x	0	α	$+\infty$
signe de $u(x)$	-	0	+

4. (a) On a $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$, donc $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$ sur \mathbb{R} .

x	0	α	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
variation de f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(b) On sait que $u(\alpha) = 0$, donc $\ln(\alpha) + \alpha - 3 = 0$, et ainsi :

$$\ln(\alpha) = 3 - \alpha.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (\ln(\alpha) - 2) \\ &= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) (1 - \alpha) \\ &= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) (1 - \alpha) \end{aligned}$$

Partie B.

1. (a) Soit F une primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

On a donc $F'(x) = f(x)$ et $F(1) = 0$.

(b) $F'(x) = 0$ en $x = 1$ et $x = e^2$.

La courbe représentative de F admet donc deux tangentes horizontales aux points d'abscisse 1 et e^2 .

2. (a) On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$. On en déduit que $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ par exemple avec u et v dérivables sur $[1; x]$ à dérivées continues.

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) dt &= [t \ln t]_1^x - \int_1^x 1 dt \\ &= x \ln(x) - (x - 1) \\ &= x \ln(x) - x + 1. \end{aligned}$$

(b) Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2) \\ &= \ln(x) - 2 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} \\ &= \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} - 2 \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_1^x \left(\ln(t) - \frac{\ln(t)}{t} + \frac{2}{t} - 2 \right) dt \\ &= x \ln(x) - x + 1 - \frac{1}{2} [(\ln t)^2]_1^x + 2 [\ln t]_1^x - 2 [t]_1^x \\ &= x \ln(x) - x + 1 - \frac{1}{2} (\ln x)^2 + 2 \ln(x) - 2x + 2 \\ &= x \ln(x) - 3x + 3 - \frac{1}{2} (\ln x)^2 + 2 \ln(x) \end{aligned}$$