Correction exercice 4

Partie A

1. — Calculons la limite de f en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-2=+\infty$: par produit des limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   — Limite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 1-\dfrac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x)-2=-\infty$ donc par produit des limites, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.
2. f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $]0;\ +\infty[$.
   $\forall x>0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2+x-1)\\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)+x-3) \end{aligned}$$

3. (a) u dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ on a $u'(x)=\dfrac{1}{x}+1>0$ ce qui prouve que la fonction u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) La fonction u est continue sur $]0\,;+\infty[$ car dérivable, elle l'est donc également sur $[2\,;3]$.
   u est strictement croissante sur $[2\,;3]$. De plus, $0\in[\ln(2)-1\,;\ln(3)]$ intervalle image de l'intervalle $[2\,;3]$ par la fonction u. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x)=0$ a une solution unique α dans $[2\,;3]$.
   On a $u(2{,}20)<0$ et $u(2{,}21)>0$ donc $2{,}20<\alpha<2{,}21$.
   (c) Compte-tenu du sens de variation de u et des questions précédentes, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

4. (a) On a démontré que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	0		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variation de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) On sait que $u(\alpha)=0$ donc $\ln(\alpha)+\alpha-3=0$ et ainsi :

$$\ln(\alpha)=3-\alpha$$

On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln(\alpha)-2) \\ &= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(1-\alpha) \\ &= -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \end{aligned}$$

Partie B

1. (a) Soit F une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1.
   On a donc $F'(x)=f(x)$.
   (b) On a $F'(x)=0$ en $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$ donc la courbe représentative de F admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisse 1 et e^2.
2. (a) On pose $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=1$. On en déduit que $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v(t)=t$ par exemple.
   Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1\,;x]$ à dérivées continues. On intègre par parties.

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t &= [t\ln t]_1^x-\int_1^x 1\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x)-[t]_1^x \\ &= x\ln(x)-(x-1) \\ &= x\ln(x)-x+1 \end{aligned}$$

   (b) Pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2) \\ &= \ln(x)-2-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x} \\ &= \ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}-2 \end{aligned}$$

   (c) On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x \ln(x)-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}-2\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x)-x+1-\frac{1}{2}\left[(\ln t)^2\right]_1^x+2\,[\ln t]_1^x-2\,[t]_1^x \\ &= x\ln(x)-x+1-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln(x)-2x+2 \\ &= x\ln(x)-3x+3-\frac{1}{2}(\ln x)^2+2\ln(x) \end{aligned}$$