

Correction exercice 5
TMaths groupe 2

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = -2 \ln x - xe + 1.$$

$$1. \text{ --- Limite en } 0 : \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} -xe + 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme des limites} \\ \implies \end{array} \lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x - xe + 1 = +\infty.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$

$$\text{--- Limite en } +\infty : \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe + 1 = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme des limites} \\ \implies \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln x - xe + 1 = -\infty.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$

2. La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{-2}{x} - e$ qui est une expression strictement négative sur $]0 ; +\infty[$: on en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

x	0	+	+
			∞
Signe de $g'(x)$		-	
Variations de g		$+\infty$ $-\infty$	

3. Sur $[0,5 ; 1]$:

--- la fonction g est continue car dérivable.

--- g est strictement décroissante.

--- On a $g(1) = -2 \ln(1) - e + 1 = 1 - e < 0$ et $g(0,5) = -2 \ln(0,5) - 0,5e + 1 > 0$.

$0 \in [1 - e ; -2 \ln(0,5) - 0,5e + 1]$ intervalle image de l'intervalle $[0,5 ; 1]$ par la fonction g .

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,5 ; 1]$.

Utilisons la méthode balayage pour déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

$g(0,6) > 0$ et $g(0,7) < 0$ donc $0,6 < \alpha < 0,7$.

4. Des questions précédentes, on en déduit le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
signe de $g(x)$	+	0	-

Partie B : étude de la fonction f

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

1. Écrivons $f(x) = \frac{1}{x^2} \times (\ln x + xe)$

— Limite en 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x + xe = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times (\ln x + xe) = -\infty.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

— Limite en $+\infty$: on a une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ », donc on change d'écriture.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{limite de cours} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme des limites} \\ \Rightarrow \end{array} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{x} = 0.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x} + e\right) \times x^2 - (\ln x + xe) \times 2x}{x^4} \\ &= \frac{x + ex^2 - 2x \ln x - 2x^2 e}{x^4} \\ &= \frac{1 + ex - 2 \ln x - 2xe}{x^3} \\ &= \frac{-2 \ln x - xe + 1}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

Pour tout réel $x > 0$ on a $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0; +\infty[$, signe connu à la question 4 de la partie A.

On en déduit que :

- f est strictement croissante sur $]0; \alpha]$
- f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$

3. On a $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha + \alpha e}{\alpha^2}$.

Or $g(\alpha) = 0 \iff -2 \ln \alpha - e\alpha + 1 = 0 \iff \ln \alpha = \frac{1 - e\alpha}{2}$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\ln \alpha + \alpha e}{\alpha^2} \\ &= \frac{1 - e\alpha}{2} + \alpha e \\ &= \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

4. On en déduit le tableau de variation complet de f sur $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variation de f	$-\infty$	$\frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$	0

5. Construction pas utile.

Partie C : intégrale et suite

Soit $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$ pour tout entier naturel n .

1. On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$.

On a alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$ par exemple avec u, u', v et v' dérivables sur $[e^n; e^{n+1}]$ à dérivées continues, on intègre par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{t} \ln t \right]_{e^n}^{e^{n+1}} + \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{t^2} : dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \ln t \right]_{e^n}^{e^{n+1}} + \left[-\frac{1}{t} \right]_{e^n}^{e^{n+1}} \\ &= -\frac{\ln(e^{n+1})}{e^{n+1}} + \frac{\ln(e^n)}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}} + \frac{1}{e^n} \\ &= -\frac{n+1}{e^{n+1}} + \frac{n}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}} + \frac{1}{e^n} \\ &= \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}} \end{aligned}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t + te}{t^2} dt \\ &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt + e \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{t} dt \\ &= I_n + e \left[\ln |t| \right]_{e^n}^{e^{n+1}} \\ &= I_n + e(n + 1 - n) \\ &= I_n + e \end{aligned}$$

(b) On a $I_0 = \frac{0+1}{e^0} - \frac{0+2}{e^{0+1}}$ donc $I_0 = 1 - \frac{2}{e}$.

$$A_0 = I_0 + e \text{ donc } A_0 = 1 - \frac{2}{e} + e.$$

(c) Soit $n = 0$ on a $e^0 = 1$ et $e^{0+1} = e$.

Sur l'intervalle $[1; e]$ la fonction f est positive donc A_0 désigne l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

3. On calcule la limite de A_n .

On commence par calculer celle de I_n .

On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}} \\ &= \frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n} - \frac{1}{e} \left(\frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n} \right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ (limite de cours) donc par inverse $\frac{n}{e^n} = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

On a $A_n = I_n + e$ et donc la suite (A_n) converge vers e .