Correction exercice 5

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = -2\ln x - x\mathrm{e} + 1.$$

1. — Limite en 0 :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{n\to 0} -x\mathrm{e}+1 = 1\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to 0} -2\ln x - x\mathrm{e} + 1 = +\infty.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

   — Limite en $+\infty$:
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} -2\ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to +\infty} -x\mathrm{e}+1 = -\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x\to +\infty} -2\ln x - x\mathrm{e} + 1 = -\infty.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
   Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-2}{x} - \mathrm{e}$ qui est une expression strictement négative sur $]0\,;+\infty[$: on en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$
Variations de g	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

3. Sur $[0{,}5\,;1]$:
   — la fonction g est continue car dérivable.
   — g est strictement décroissante.
   — On a $g(1) = -2\ln(1) - \mathrm{e} + 1 = 1 - \mathrm{e} < 0$ et $g(0,5) = -2\ln(0,5) - 0,5\mathrm{e} + 1 > 0$.
   $0 \in [1-\mathrm{e}\,; -2\ln(0,5) - 0,5\mathrm{e} + 1]$ intervalle image de l'intervalle $[0,5\,;1]$ par la fonction g.
   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,5\,;1]$.

   Utilisons la méthode balayage pour déterminer un encadrement de α à 0,1 près.
   $g(0,6) > 0$ et $g(0,7) < 0$ donc $0,6 < \alpha < 0,7$.

4. Des questions précédentes, on en déduit le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

Partie B : étude de la fonction f

$$f(x)=\frac{\ln x+x\mathrm{e}}{x^2}.$$

1. Écrivons $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\times(\ln x+x\mathrm{e})$
   — Limite en 0 :
   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\\[2em] \displaystyle\lim_{x\to 0}\ln x+x\mathrm{e}=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\times(\ln x+x\mathrm{e})=-\infty.$$
   Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

   — Limite en $+\infty$: on a une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », donc on change d'écriture.
   $$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{\mathrm{e}}{x}$$
   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0\quad\text{limite de cours}\\[2em] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{x}=0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme des limites}}{\Longrightarrow}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}+\frac{\mathrm{e}}{x}=0.$$
   Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,
   $$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\left(\frac{1}{x}+\mathrm{e}\right)\times x^2-(\ln x+x\mathrm{e})\times 2x}{x^4}\\&=\frac{x+\mathrm{e}x^2-2x\ln x-2x^2\mathrm{e}}{x^4}\\&=\frac{1+\mathrm{e}x-2\ln x-2x\mathrm{e}}{x^3}\\&=\frac{-2\ln x-x\mathrm{e}+1}{x^3}\\&=\frac{g(x)}{x^3}\end{aligned}$$
   Pour tout réel $x>0$ on a $x^3>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, signe connu à la question 4 de la partie A.
   On en déduit que :
   — f est strictement croissante sur $]0\,;\alpha]$
   — f est strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$

3. On a $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha+\alpha\mathrm{e}}{\alpha^2}$.
   Or $g(\alpha)=0\iff -2\ln\alpha-\mathrm{e}\alpha+1=0\iff \ln\alpha=\dfrac{1-\mathrm{e}\alpha}{2}$.

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha) & = & \dfrac{\ln\alpha+\alpha\mathrm{e}}{\alpha^2} \\ & = & \dfrac{\dfrac{1-\mathrm{e}\alpha}{2}+\alpha\mathrm{e}}{\alpha^2} \\ & = & \dfrac{1+\alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2} \end{array}$$

4. On en déduit le tableau de variation complet de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{1+\alpha\mathrm{e}}{2\alpha^2}$	↘	0

5. Construction pas utile.

Partie C : intégrale et suite

Soit $I_n=\displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}}\frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n=\displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. On pose $u(t)=\ln t$ et $v'(t)=\dfrac{1}{t^2}$.
   On a alors $u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v(t)=-\dfrac{1}{t}$ par exemple avec u, u', v et v' dérivables sur $[\mathrm{e}^n\,;\mathrm{e}^{n+1}]$ à dérivées continues, on intègre par parties :

$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \left[-\dfrac{1}{t}\ln t\right]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}}+\displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}}\dfrac{1}{t^2}:\mathrm{d}t \\ & = & \left[-\dfrac{1}{t}\ln t\right]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}}+\left[-\dfrac{1}{t}\right]_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \\ & = & -\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{n+1})}{\mathrm{e}^{n+1}}+\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n)}{\mathrm{e}^n}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} \\ & = & -\dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}}+\dfrac{n}{\mathrm{e}^n}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^n} \\ & = & \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^n}-\dfrac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}} \end{array}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t + t\mathrm{e}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= I_n + \mathrm{e}\Big[\ln|t|\Big]_{e^n}^{e^{n+1}} \\ &= I_n + \mathrm{e}(n+1-n) \\ &= I_n + \mathrm{e} \end{aligned}$$

(b) On a $I_0 = \frac{0+1}{\mathrm{e}^0} - \frac{0+2}{\mathrm{e}^{0+1}}$ donc $I_0 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.
$A_0 = I_0 + \mathrm{e}$ donc $A_0 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} + \mathrm{e}$.

(c) Soit $n = 0$ on a $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{0+1} = \mathrm{e}$.
Sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ la fonction f est positive donc A_0 désigne l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

3. On calcule la limite de A_n.
On commence par calculer celle de I_n.
On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}} \\ &= \frac{n}{\mathrm{e}^n} + \frac{1}{\mathrm{e}^n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{n}{\mathrm{e}^n} + \frac{2}{\mathrm{e}^n}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$ (limite de cours) donc par inverse $\frac{n}{texte^n} = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
On a $A_n = I_n + \mathrm{e}$ et donc la suite (A_n) converge vers e.