

Correction exercice 6

TMaths groupe 2

1. Détermination de n

L'urne contient $n + 2$ boules. Le nombre de façons de tirer simultanément 2 boules parmi $n + 2$ est donné par :

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

L'événement A_2 correspond au tirage des 2 boules blanches parmi les 2 disponibles, soit $\binom{2}{2} = 1$ possibilité. On a donc :

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{\binom{n+2}{2}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

On cherche n tel que $\mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{15}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{15} &\iff (n+2)(n+1) = 30 \\ &\iff n^2 + 3n + 2 = 30 \\ &\iff n^2 + 3n - 28 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4(1)(-28) = 121 = 11^2$.

Les racines sont $n_1 = \frac{-3-11}{2} = -7$ et $n_2 = \frac{-3+11}{2} = 4$.

Comme n représente un nombre de boules, on en déduit : $n = 4$.

2. Cas où $n = 4$ (L'urne contient 2 blanches et 4 noires, soit 6 boules).

Le nombre total de tirages possibles est $\binom{6}{2} = 15$.

(a) Calcul des probabilités $\mathbf{P}(A_0)$ et $\mathbf{P}(A_1)$

— A_0 (2 noires parmi 4) : $\mathbf{P}(A_0) = \frac{\binom{4}{2}}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

— A_1 (1 noire parmi 4 et 1 blanche parmi 2) : $\mathbf{P}(A_1) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{2}{1}}{15} = \frac{8}{15}$.

(b) Loi de probabilité de X

Le joueur marque 3 points par boule blanche et 2 points par boule noire.

— Si A_0 se réalise (2 noires) : $X = 2 \times 2 = 4$.

— Si A_1 se réalise (1N, 1B) : $X = 2 + 3 = 5$.

— Si A_2 se réalise (2 blanches) : $X = 2 \times 3 = 6$.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	4	5	6
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

Espérance mathématique :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i) \\ &= 4 \times \frac{6}{15} + 5 \times \frac{8}{15} + 6 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{24 + 40 + 6}{15} = \frac{70}{15} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}} \approx 4,67 \end{aligned}$$