Correction exercice 6

1. L'urne est composée de $n+2$ boules.

   Le joueur tire simultanément deux boules de l'urne il y a donc $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ tirages possibles.

   Pour que le joueur tire deux boules blanches, il doit tirer ces deux boules blanches parmi les deux boules blanches soit $\binom{2}{2} = 1$ choix possible et donc :

   $$\mathbf{P}(A_2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

   $\mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{15} \Longleftrightarrow \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{15} \Longleftrightarrow (n+1)(n+2) = 30 \Longleftrightarrow n^2+3n-28 = 0.$

   Cette équation a pour solutions $n = 4$ ou $n = -7$ qui est valeur impossible car négative : on en déduit que $\mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{15}$ si et seulement si $n = 4$.

2. Dans **toute la suite du problème** on prend $n = 4$.

   L'urne est donc composée de 4 boules noires et deux boules blanches.

   (a) — Pour A_0 : pour obtenir deux boules noires, le joueur doit tirer deux boules noires parmi les 4 noires : il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix possibles.

   Le nombre de tirages total est $\binom{6}{2} = 15$ et on en déduit que $\mathbf{P}(A_0) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

   — Pour A_1 : pour obtenir une boule noire, le joueur doit tirer une boule noire parmi les 4 noires et une blanche parmi les deux blanches : il y a $\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 8$ choix possibles.

   Le nombre de tirages total est $\binom{6}{2} = 15$ et on en déduit que $\mathbf{P}(A_1) = \frac{8}{15}$

   (b) Utilisons les questions précédentes et remarquons que $\mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{15}$.

   On a $X(\Omega) = \{4\,;5\,;6\}$ puis :

   — $\mathbf{P}(X=4) = \mathbf{P}(A_0) = \frac{6}{15}$;

   — $\mathbf{P}(X=5) = \mathbf{P}(A_1) = \frac{8}{15}$;

   — $\mathbf{P}(X=6) = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{15}$.

   On en déduit que :

   $$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(X = x_i) \times x_i \\ &= 4\times\frac{6}{15} + 5\times\frac{8}{15} + 6\times\frac{1}{15} \\ &= \frac{14}{3}\end{aligned}$$