

## Correction exercice 7

*TMaths groupe 2*

1. Supposons  $f$  constante : on pose donc  $f(x) = C$  où  $C \in \mathbb{R}$ . On a  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  est solution de  $(E_0) : y' = y$ , alors :

$$f'(x) = f(x) \iff 0 = C$$

L'unique fonction constante solution de  $(E_0)$  est donc la **fonction nulle**.

2. L'équation  $y' = y$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme  $y' = ay$  avec  $a = 1$ . Les solutions sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme :

$$x \implies Ce^x \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

3. On a  $h(x) = 2 \cos(x) + \sin(x)$ . La fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$h'(x) = -2 \sin(x) + \cos(x)$$

Vérifions si  $h$  vérifie l'équation  $(E) : y' = y - \cos(x) - 3 \sin(x)$  :

$$\begin{aligned} h(x) - \cos(x) - 3 \sin(x) &= (2 \cos(x) + \sin(x)) - \cos(x) - 3 \sin(x) \\ &= \cos(x) - 2 \sin(x) \end{aligned}$$

On constate que  $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3 \sin(x)$ . Donc  $h$  est bien solution de  $(E)$ .

4.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff f'(x) - f(x) = -\cos(x) - 3 \sin(x) \\ &\iff f'(x) - f(x) = h'(x) - h(x) \quad \text{vu que } h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3 \sin(x) \\ &\iff f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x) \\ &\iff (f - h)'(x) = (f - h)(x) \\ &\iff f - h \text{ solution de } (E_0) \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est solution de  $(E)$  équivaut à  $f - h$  est solution de  $(E_0)$ .

5. D'après l'équivalence précédente,  $f - h$  est de la forme  $Ce^x$ . Les solutions de  $(E)$  sont donc les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = Ce^x + h(x) = Ce^x + 2 \cos(x) + \sin(x) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

6. On cherche  $C$  tel que :

$$g(0) = 0 \iff Ce^0 + 2 \cos(0) + \sin(0) = 0$$

$$\iff C(1) + 2(1) + 0 = 0 \implies C = -2$$

L'unique solution est  $g(x) = -2e^x + 2 \cos(x) + \sin(x)$ .

7. On remarque que la fonction à intégrer est précisément  $g(x)$ .

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2e^x + \sin(x) + 2 \cos(x)] dx$$

Une primitive de  $g$  est  $G(x) = -2e^x - \cos(x) + 2\sin(x)$ .

$$\begin{aligned} I &= [-2e^x - \cos(x) + 2\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (-2e^0 - \cos(0) + 2\sin(0)) \\ &= \left(-2e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2\right) - (-2 - 1 + 0) \\ &= -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 - (-3) \\ &= \mathbf{5 - 2e^{\frac{\pi}{2}}} \end{aligned}$$