Correction exercice 7

1. Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0). On a alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x. Or $f' = f$ donc $0 = k$ et par suite $f(x) = 0$ pour tout réel x.
   L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.
2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto C\mathrm{e}^x$, $C \in \mathbb{R}$.
3. h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x on a : $\quad h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.
   D'autre part : $\quad h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) =$
   $\cos(x) - 2\sin(x)$
   d'où pour tout réel x, $\quad h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, h est solution de l'équation différentielle (E).
4. Supposons que f soit une solution de (E).
   Pour tout réel x on a :
   $$\begin{aligned}(f-h)'(x) = f'(x) - h'(x) &\Longrightarrow (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - (h(x) - \cos(x) - 3\sin(x))\\ &\quad\text{car } f \text{ et } h \text{ sont solutions de } (E)\\ &\Longrightarrow (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x)\\ &\Longrightarrow (f-h)'(x) = f(x) - h(x) = (f-h)(x)\end{aligned}$$
   Donc $f - h$ est solution de (E_0)

   Réciproquement : supposons que $f - h$ soit solution de (E_0)
   On a donc $(f-h)'(x) = f(x) - h(x)$ soit $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$
   D'où : $f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ car h est solution de (E)
   Donc : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ c'est à dire f est solution de (E).
   Conclusion : f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
5. On a donc $f(x) - h(x) = C\mathrm{e}^x$ avec $C \in \mathbb{R}$
   Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions
   $f(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$
6. g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que
   $g(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.
   De plus $g(0) = 0$ donc $g(0) = C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.
   D'où $C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \Longleftrightarrow C = -2$
   On a donc : $\quad g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.
7. Calculons : $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$
   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \Big[-2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$
   $I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \left(-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right)$
   $I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$