

Correction exercice 8

TMaths groupe 2

1. (a) L'équation du plan \mathcal{P}_1 est $2x + y - z + 2 = 0$. Un vecteur normal \vec{n}_1 à ce plan est donné par les coefficients de x, y et z :

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (b) On a $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculons le produit scalaire $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

Le produit scalaire est nul, donc $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$. Par conséquent, les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont perpendiculaires.

2. (a) \mathcal{P}_2 passe par $B(1; 1; 2)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1; -1; 1)$. Son équation est de la forme $x - y + z + d = 0$. En substituant les coordonnées de B :

$$1 - 1 + 2 + d = 0 \implies 2 + d = 0 \implies d = -2$$

L'équation cartésienne de \mathcal{P}_2 est : $x - y + z - 2 = 0$.

- (b) Un point $M(x; y; z)$ appartient à l'intersection Δ si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

En additionnant les deux équations membre à membre, on obtient $3x = 0$, d'où $x = 0$. En remplaçant x par 0 dans la deuxième équation, on a $-y + z - 2 = 0$, soit $y = z - 2$. En posant $z = t$ (paramètre réel), on obtient bien :

$$\Delta : \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. (a) Soit $A(1; 1; 1)$ et $M_t(0; -2 + t; t)$.

$$\begin{aligned} AM_t^2 &= (0 - 1)^2 + (-2 + t - 1)^2 + (t - 1)^2 \\ &= (-1)^2 + (t - 3)^2 + (t - 1)^2 \\ &= 1 + (t^2 - 6t + 9) + (t^2 - 2t + 1) \\ &= 2t^2 - 8t + 11 \end{aligned}$$

D'où $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

- (b) H est le projeté orthogonal de A sur Δ , donc AH est la valeur minimale de la distance AM_t . Le trinôme $2t^2 - 8t + 11$ atteint son minimum en $t = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$. Pour $t = 2$: $AM_2^2 = 2(2)^2 - 8(2) + 11 = 8 - 16 + 11 = 3$. On en déduit $AH = \sqrt{3}$.

4. (a) \mathcal{D}_1 passe par $A(1; 1; 1)$ et est dirigée par $\vec{n}_1(2; 1; -1)$:

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

(b) H_1 est l'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{P}_1 :

$$2(1 + 2k) + (1 + k) - (1 - k) + 2 = 0 \implies 6k + 4 = 0 \implies k = -\frac{2}{3}$$

En remplaçant k dans le système de \mathcal{D}_1 , on trouve bien $H_1(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3})$.

5. Calculons les vecteurs $\vec{H_1A}$ et $\vec{HH_2}$:

$$\vec{H_1A} \begin{pmatrix} 1 - (-1/3) \\ 1 - 1/3 \\ 1 - 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{HH_2} \begin{pmatrix} 4/3 - 0 \\ 2/3 - 0 \\ 4/3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Comme $\vec{H_1A} = \vec{HH_2}$, AH_1HH_2 est un parallélogramme.

De plus, $\vec{H_2A} \begin{pmatrix} 1 - 4/3 \\ 1 - 2/3 \\ 1 - 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

Calculons $\vec{H_1A} \cdot \vec{H_2A}$:

$$\frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

Le parallélogramme possède un angle droit en A , c'est donc un rectangle.