Correction exercice 8

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le plan $\mathscr{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+y-z+2=0$,
- le plan $\mathscr{P}_2$ passant par le point $B(1\,;\,1\,;\,2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. (a) Le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $2x+y-z+2=0$.

   (b) $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=2\times1+1\times(-1)+(-1)\times1=0$ donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.
   On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. (a) Le plan $\mathscr{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc il a une équation cartésienne de la forme $x-y+z+d=0$ où d est un réel à déterminer.
   $B\in\mathscr{P}_2$ donc $x_B-y_B+z_B+d=0$, autrement dit $1-1+2+d=0$ donc $d=-2$.
   Le plan $\mathscr{P}_2$ a donc pour équation cartésienne $x-y+z-2=0$.

   (b) On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&-2+t\\z&=&t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
   On cherche l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système : $\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-z+2&=&0\\x-y+z-2&=&0\end{array}\right.$.
   $\left\{\begin{array}{rcl}2x+y-z+2&=&0\\x-y+z-2&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}2x+y&=&z-2\\x-y&=&-z+2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}3x&=&0\\2x+y&=&z-2\end{array}\right.$
   On aboutit donc à $x=0$, $y=z-2$ et z quelconque égal à t.
   Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont donc pour intersection la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&0\\y&=&-2+t\\z&=&t\end{array}\right.\ t\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite Δ.

On considère le point $A(1\,;\,1\,;\,1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathscr{P}_1$ ni à $\mathscr{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;\,-2+t\,;\,t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

   (a) $AM_t^2=(0-1)^2+(-2+t-1)^2+(t-1)^2=1+\left(9-6t+t^2\right)+\left(t^2-2t+1\right)=2t^2-8t+11$
   Donc $AM_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

   (b) Le point H est le projeté orthogonal de A sur la droite Δ, donc la longueur AH réalise le minimum des longueurs AM_t où M_t est un point de Δ.
   Il faut donc chercher le minimum de $\sqrt{2t^2-8t+11}$, donc le minimum de $2t^2-8t+11$.
   D'après les propriétés de la fonction du second degré, le minimum de $f(x)=ax^2+bx+c$ quand $a>0$, est réalisé pour $x=-\dfrac{b}{2a}$ et vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
   Donc le minimum de $2t^2-8t+11$ est réalisé pour $t=-\dfrac{-8}{2\times2}=2$, et vaut $2\times2^2-8\times2+11=3$.
   On en déduit que $AH=\sqrt{3}$.

4. On note $\mathscr{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}_1$.

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$.

   La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ donc le vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan $\mathscr{P}_1$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$. De plus la droite $\mathscr{D}_1$ passe par le point A. Elle a donc pour représentation paramétrique :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_{\mathrm{A}}+2t \\ y &=& y_{\mathrm{A}}+t \\ z &=& z_{\mathrm{A}}-t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$

   (b) La droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ donc le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}_1$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{P}_1$; ses coordonnées vérifient le système :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 1-t \\ 2x+y-z+2 &=& 0 \end{array}\right.$$

   Donc t vérifie $2(1+2t)+(1+t)-(1-t)+2=0$, soit $2+4t+1+t-1+t+2=0$, ce qui donne $t=-\dfrac{2}{3}$.

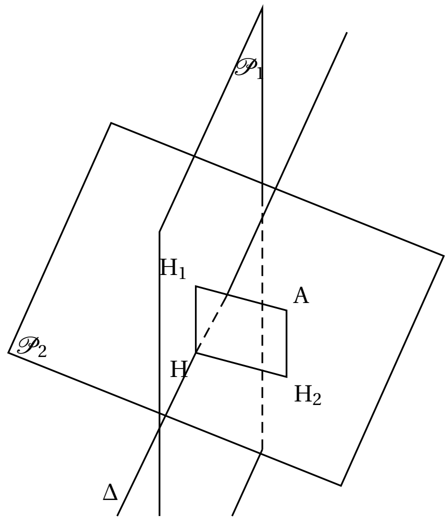
   $x=1+2t=1-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}$, $y=1+t=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ et $z=1-t=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$

   Le point H_1 a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}_2$.

   On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;0\,;2)$.

   Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.



   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AH}_1}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}-1 \\ \frac{1}{3}-1 \\ \frac{5}{3}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{H}_2\mathrm{H}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-\frac{4}{3} \\ 0-\frac{2}{3} \\ 2-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{\mathrm{AH}_1} = \overrightarrow{\mathrm{H}_2\mathrm{H}}$ donc la quadrilatère $\mathrm{AH}_1\mathrm{HH}_2$ est un parallélogramme.

   La droite (AH_1) est orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ et H_1 appartient à ce plan; donc (AH_1) est perpendiculaire à toutes les droites de $\mathscr{P}_1$ passant par H_1, en particulier la droite (HH_1).

   Le parallélogramme $\mathrm{AH}_1\mathrm{HH}_2$ possède un angle droit donc c'est un rectangle.