Correction exercice 9

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} & f(x) & = & x \\ \iff & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \iff & \ln(x^2+1) & = & 0 \\ \iff & x^2+1 & = & \mathrm{e}^0 \\ \iff & x^2 & = & 0 \\ \iff & x & = & 0 \end{array}$$

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

De $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right.$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

Il vient ensuite, par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$$

De $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty \end{array}\right.$ on déduit, par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0\,;\,1]$, l'ordre est donc conservé sur $[0\,;\,1]$.
Par suite :

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

On a $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0 \\ \text{et} \\ f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2 \end{array}\right.$. Puisque $1 - \ln 2 < 1$, alors

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant f(x) < 1$$

On a prouvé :

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) \in [0,1]$$

4. (a) Le programme affiche la plus petite valeur de n pour laquelle $n - \ln(n^2+1)$ est supérieur ou égal à A.
   (b) Pour $A = 100$, l'algorithme affiche 110.

Partie B.

1. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
   - Puisque $u_0 = 1$, $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}_n$ vraie c'est-à-dire $u_n \in [0\ ;\ 1]$.
   D'après la troisième question de la partie A, on en déduit :
   $$f(u_n) \in [0\ ;\ 1]$$
   soit :
   $$u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$$
   Et ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire à partir du rang $n = 0$.
   $\mathscr{P}_n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0\ ;\ 1]$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:
   $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2 + 1\right)$.
   Étudions le signe de $-\ln\left(u_n^2+1\right)$:
   Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0,1]$:
   $$0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$$
   soit :
   $$u_n^2 \in [0,1]$$
   Par suite :
   $$u_n^2 + 1 \in [1,2]$$
   La fonction ln est croissante sur $[1\,;+\infty[$ donc l'ordre est conservé dans $[1\,;+\infty[$.
   De $u_n^2+1 \geqslant 1$, on déduit $\ln(u_n^2+1) \geqslant \ln 1$, soit $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$.
   Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$, alors

   La suite (u_n) est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc vers un nombre réel ℓ.
4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution, on en déduit :
   $$\ell = 0$$